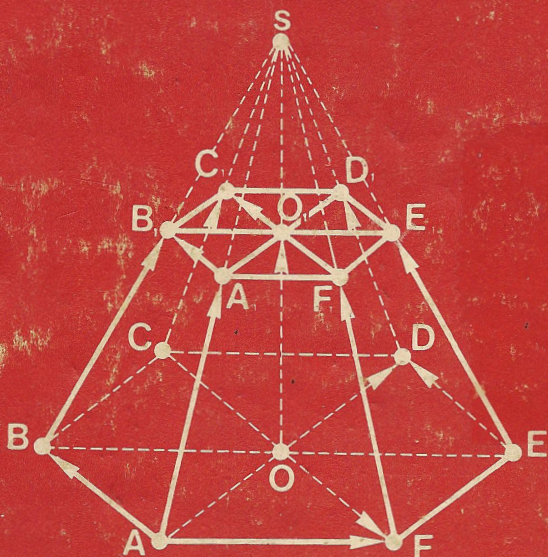


جبر برداری

تأليف پ. گوسیاتنیکوف / س. رِژنی چنکو

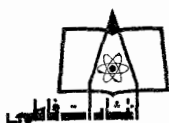
ترجمه پرویز شهریاری / ابراهیم عادل



جبر برداری

تألیف پ. گوسیاتنیکوف / س. ریژنی چنکو

ترجمه پرویز شهرباری / ابراهیم عادل



جبر برداری

VECTOR ALGEBRA

مؤلف: پ. گوسیاتنیکوف P. Gusyatnikov

س. رزنی چنکو S. Reznichenko

مترجم: پرویز شهریاری / ابراهیم عادل

چاپ اول: اردیبهشت ماه ۱۳۶۹

تیراژ: ۵۵۰۰ نسخه

چاپ و صحافی: چاپخانه کلینی

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است

نشانی: تهران، خیابان دکتر فاطمی، شماره ۱۵۹

تلفن: ۶۵۱۴۲۲

پیش گفتار

این کتاب بر اساس تجربه سال‌ها تدریس در انستیتوی فیزیک و تکنولوژی دانشگاه مسکو در زمینه «جبر برداری» نوشته شده است و با برنامه درسی دانشکده‌های فیزیک و ریاضی دانشگاه‌ها و دانشکده‌های مهندسی و تربیت معلم تطبیق می‌کند.

کتاب به تفصیل درباره روش‌های گوناگون از بردارها در حل مسئله‌های هندسی صحبت می‌کند، شیوه نوشتن کتاب به گونه‌ای است که هر دانشجویی بتواند به‌طور مستقیم و به‌صورت خودآموز از آن استفاده کند و روش‌های آن را برای حل مسئله‌های هندسی به کار برد.

فصل اول کتاب، شامل همه نظریه‌های اساسی هندسه مقدماتی است. در فصل دوم از عمل‌های خطی روی بردارها و در فصل سوم از حاصل ضرب اسکالر صحبت شده است. سه فصل اول کتاب می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان دبیرستانی هم قرار گیرد. فصل چهارم به حاصل ضرب برداری و حاصل ضرب مختلط سه بردار اختصاص دارد و به حل مسئله‌هایی پرداخته است که در فضای برداری سه بعدی مطرح می‌شوند. به‌خصوص همین فصل چهارم است که می‌تواند برای درک بهتر «جبر برداری» به‌خواننده کمک کند. فصل پنجم در ارتباط با عددهای مختلط و ویژگی‌های اصلی تبدیل‌های هندسی تنظیم شده است.

مسئله‌های هر بخش از آسان به مشکل مرتب شده‌اند و مسئله‌های دشوارتر را با علامت * مشخص کرده‌ایم.

فهرست

صفحه

۹	فصل اول- یادی از هنده سه مقدماتی
۹	۱.۱. برخی تعریف ها و نمادهای اساسی
۱۴	۲.۱. تبدیل مشابه، تغییر مکان
۱۴	۳.۱. پاره خط راست جهت دار، انتقال
۱۸	۴.۱. جمع پاره خط های راست جهت دار، ترکیب انتقال ها
۲۲	۵.۱. ضرب پاره خط راست جهت دار در يك عدد
۲۵	فصل دوم- عمل های خطی با بردارها
۲۵	۱.۲. تعریف های اصلی
۳۰	۲.۲. جمع بردارها، تفاضل بردارها
۳۷	۳.۲. ضرب بردار در عدد، معیاری برای هم راستا بودن بردارها
۵۱	۴.۲. ماتریس ها، دترمینان ها، دستگاه معادله های خطی
۵۲	۵.۲. هم صفحه بودن بردارها، پایه در صفحه و فضا، تجزیه
۷۱	(بسط) بردارها
۶۲	۶.۲. دستگاه مختصات، مختصات نقطه در دستگاه مختصات.
۹۲	دستورهای انتقال از يك دستگاه، به دستگاه دیگر مختصات

۱۳۱	۷.۲. تصویر موازی
۱۴۶	۸.۲. مثال‌های مختلف

فصل سوم- حاصل ضرب عددی (اسکالر) دو بردار

۱۷۷	۱.۳. زاویه بین بردارها. تعریف حاصل ضرب اسکالر. قانون کسینوس
۱۸۸	۲.۳. ویژگیهای حاصل ضرب داخلی
۲۲۲	۳.۳. تصویر عمودی در فضا. معادله متعارف برداری صفحه
۲۳۲	۴.۳. دستگاه مختصات قائم. خط راست در صفحه. خط راست و صفحه در فضا

فصل چهارم- حاصل ضرب برداری دو بردار. حاصل ضرب سه گانه عددی

۲۸۰	۱.۴. جهت در صفحه و در فضا
۲۸۴	۲.۴. تعریف و ویژگیهای حاصل ضرب برداری. شرط هم راستایی. مساحت مثلث و چهارضلعی
۳۰۷	۳.۴. حاصل ضرب سه گانه برداری. معادله برداری خط راست در فضا. بردار نرمال صفحه
۳۱۷	۴.۴. حاصل ضرب سه گانه اسکالر. معیار هم صفحه بودن بردارها. حجم چهاروجهی
۳۴۴	۵.۴. مسأله‌هایی درباره خط راست و صفحه

فصل پنجم- عددهای مختلط

۳۵۸	۱.۵. عددهای مختلط و عمل روی آنها
۳۶۴	۲.۵. ویژگیهای عمل‌ها روی عددهای مختلط
۳۷۱	۳.۵. عددهای مختلط به صورت مثلثاتی و نمایی
۳۸۳	۴.۵. تعبیر هندسی عددهای مختلط. تعبیر I
۳۹۰	۵.۵. تعبیر هندسی عددهای مختلط. تعبیر II

۴۰۰

۴۰۰

۴۰۱

۴۰۱

۴۰۲

۱. ویژگیهای تبدیل در تشابه به P ۲. ویژگیهای تبدیل، در تجانس H^k_0 ۳. ویژگیهای تقارن مرکزی Z_0 ۴. ویژگیهای انتقال T_{AB}

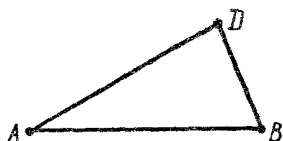
فصل اول

یادی از هندسهٔ مقدماتی

بخش ۱.۱. برخی تعریف‌ها و نمادهای اساسی

هر پاره خط راست، به وسیلهٔ دو نقطه، یعنی دو انتهای آن، تعریف می‌شود. پاره خط راست با دو انتهای A و B را، به یکی از دو صورت $[AB]$ یا $[BA]$ نشان می‌دهند. اگر دو نقطهٔ A و B متمایز باشند ($A \neq B$)، آن وقت پاره خط راست $[AB]$ ، خط راست منحصر به فرد (AB) را تعریف می‌کند. وقتی از پاره خط راست $[AB]$ ، به عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌ها صحبت می‌کنیم، به معنای آن است که، این پاره خط راست، شامل دو نقطهٔ A و B است و، به جز آن‌ها، تنها نقطه‌هایی مثل C را در برمی‌گیرد که برخط راست (AB) و بین دو نقطهٔ A و B واقع باشند. اگر $A = B$ ، آن گاه پاره خط راست $[AA]$ ، شامل نقطهٔ منحصر به فرد A است.

اگر واحدی را برای اندازه‌گیری در نظر بگیریم، هر پاره خط راست $[AB]$ ، متناظر با یک عدد حقیقی غیر منفی $|AB|$ می‌شود، که طول پاره خط راست $[AB]$ است. وقتی که دربارهٔ طول پاره خط‌های راست صحبت می‌کنیم، به واحدی که برای بیان آن انتخاب کرده‌ایم، اشاره‌ای نخواهیم کرد. طول پاره خط راست $[AB]$ ، در ضمن، فاصلهٔ بین نقطه‌های A و B را هم بیان می‌کند.



شکل ۲.۱



شکل ۱.۱

ویژگی‌های فاصله

$$۱. |AB| = |BA|$$

۲. برای $A \neq B$ داریم: $|AB| > 0$ ، و برای $A = B$: $|AB| = 0$ ؛

۳. نقطه C تنها وقتی بر پاره خط راست $[AB]$ قرار دارد که داشته

$$|AC| + |CB| = |AB| \quad (\text{شکل ۱.۱}).$$

۴. برای هر نقطه D ، که بر پاره خط راست $[AB]$ واقع نباشد،

نا برابری

$$|AD| + |DB| > |AB|$$

برقرار است که، آن را، نابرابری مثلثی گویند (شکل ۲.۱).

$A \neq B$ می‌گیریم. در این صورت، هر نقطه C از پاره خط راست $[AB]$

را، که بر یکی از دو انتهای آن منطبق نباشد، يك نقطه درونی این پاره خط

راست می‌نامند. موقعیت نقطه C بر پاره خط راست $[AB]$ ، به وسیله طول

پاره خط راست $[AC]$ و یا نسبت $\lambda = \frac{|AC|}{|CB|}$ مشخص می‌شود و گویند،

نقطه C ، پاره خط راست $[AB]$ را، با آغاز از A ، به نسبت λ تقسیم کرده

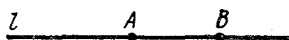
است. اگر $\lambda = 1$ ، یعنی $|AC| = |CB|$ ، آن گاه، نقطه C را وسط پاره خط

راست $[AB]$ گویند. وسط پاره خط راست $[AA]$ ، خود نقطه A است. اگر

O را نقطه ثابتی فرض کنیم، نگاشت Z_0 ، که نقطه A را به نقطه متناظر آن $B = Z_0(A)$ تبدیل کند، به معنای آن است که O وسط پاره خط راست $[AB]$ قرار دارد و، در این صورت، نگاشت را، تقارن مرکزی به مرکز O گویند. O را مرکز تقارن و دو نقطه A و $Z_0(A)$ را قرینه یکدیگر، نسبت به مرکز تقارن O ، می نامند.



شکل ۴.۱



شکل ۳.۱

هر نقطه A ، واقع بر خط راست l ، این خط راست را، به دو نیم خط راست l_+ و l_- ، نسبت به مرکز A ، تقسیم می کند. این نیم خط های راست را، مکمل یکدیگر گویند و می نویسند

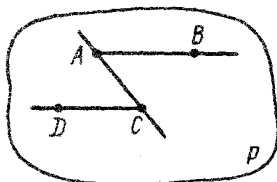
$$l_+ = \bar{l}_-, \quad l_- = \bar{l}_+$$

نقطه A به هر کدام از نیم خط های راست l_+ و l_- تعلق دارد. دو نقطه $B \neq A$ و $C \neq A$ از خط راست l ، تنها وقتی به یکی از نیم خط های راست به مبداء $A \in l$ متعلق اند که پاره خط راست $[BC]$ ، شامل نقطه A نباشد و، همچنین، تنها وقتی متعلق به دو نیم خط راست مکمل اند که، نقطه A ، نقطه ای درونی از پاره خط راست $[BC]$ باشد. نیم خط راست به مبداء A ، که نقطه $B \neq A$ ، یکی از نقطه های آن باشد، با نماد $[AB]$ نشان داده می شود (شکل ۳.۱).

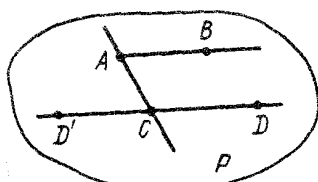
دو نیم خط راست واقع بر يك خط راست را در يك جهت گویند، وقتی که اشتراك آنها يك نیم خط باشد؛ آنها را در خلاف جهت یکدیگر گویند، وقتی که اشتراك آنها يك نیم خط نباشد. مثلاً در شکل ۴.۱، نیم خط های راست $[AB]$ و $[CB]$ هم جهت اند، در حالی که نیم خط های

راست $[BA]$ و $[CB]$ در خلاف جهت یکدیگرند.

هر خط راست l واقع در صفحه P ، آن صفحه را به دو نیم صفحه P_+ و P_- تقسیم می کند که به وسیله خط راست l از هم جدا شده اند. خط راست l ، به هر دو نیم صفحه تعلق دارد. نقطه های $B \notin l$ و $C \notin l$ از صفحه P ، تنها وقتی در یکی از دو نیم صفحه ای که به وسیله خط راست $l \subset P$ مشخص شده اند، قرار دارد که پاره خط راست $[BC]$ ، برخوردی با خط راست l نداشته باشد.



شکل ۵.۱



شکل ۶.۱

هر دو نیم خط $[AB]$ و $[CD]$ ، که به دو خط راست موازی غیر منطبق برهم تعلق داشته باشند، بزرگ صفحه مشخص P واقع اند. دو نیم خط راست $[AB]$ و $[CD]$ را هم جهت گویند (و می نویسند: $([AB]) \uparrow \uparrow [CD]$)، وقتی که در یکی از دو نیم صفحه ای واقع باشند که به وسیله خط راست $l \subset P$ مشخص شده اند (شکل ۵.۱). آن ها را در خلاف جهت هم گویند (و می نویسند: $([AB]) \uparrow \downarrow [CD]$)، وقتی که در دو نیم صفحه مختلف باشند (شکل ۶.۱). این روشن است که

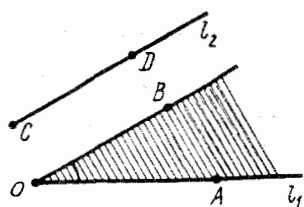
اگر $([AB]) \uparrow \uparrow [CD]$ ، آن گاه $(\overline{AB}) \uparrow \downarrow [CD]$

دو نیم خط راست $[AB]$ و $[CD]$ ، تنها وقتی در خلاف جهت یکدیگرند که بتوان نقطه ای مانند O پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

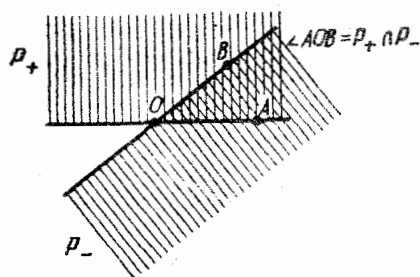
$$[CD] = Z_O([AB])$$

ویژگی زیر، یعنی ویژگی سرایت پذیری نیم خط‌های راست هم‌جهت، مهم است: اگر هر يك از دو نیم خط راست با نیم خط راست سوم هم‌جهت باشند، با یکدیگر هم‌جهت‌اند.

صفحه P و سه نقطه متمایز O ، A و B واقع بر آن را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، این سه نقطه، روی يك خط راست نباشند. خط راست (OA) ، صفحه P را به دو نیم صفحه تقسیم می‌کند که، نقطه B ، در یکی از آن‌ها قرار دارد؛ این نیم صفحه را P_+ می‌نامیم. به همین ترتیب، نقطه A ، در نیم صفحه P قرار دارد که به وسیله خط راست (OB) از صفحه P جدا شده است. زاویه محدب AOB ، بین نیم خط‌های راست $[OA)$ و $[OB)$ ، به عنوان اشتراك مجموعه‌های P_+ و P_- مشخص می‌شود (شکل ۷.۱). مقدار زاویه محدب AOB ، به عنوان زاویه بین دو نیم خط راست $[OA)$ و $[OB)$ معین می‌شود و می‌نویسند $\widehat{AOB}$.



شکل ۸.۱



شکل ۷.۱

مقدار این زاویه را می‌توان با درجه یا رادیان بیان کرد و داریم:

$$0^\circ < \widehat{AOB} < 180^\circ \quad \text{یا} \quad 0 < \widehat{AOB} < \pi$$

فرض می‌کنیم، نیم خط‌های راست $l_1 = [OA)$ و $l_2 = [CD)$ ، بر يك خط راست نباشند. از نقطه O ، تنها يك نیم خط راست $[OB)$ را می‌توان رسم

کرد که با نیم خط راست l_2 هم جهت باشد. زاویه بین نیم خط‌های راست l_1 و l_2 را، با زاویه $\angle AOB$ مشخص می‌کنند (شکل ۸.۱).
طبق تعریف، زاویه بین دو نیم خط راست هم جهت برابر 0° و زاویه بین دو نیم خط راست با جهت‌های مختلف، برابر 180° است.

بخش ۲.۱. تبدیل متشابه. تغییر مکان

تبدیل p از فضا (یا صفحه) را تبدیل متشابه گویند، وقتی که عدد $k > 0$ وجود داشته باشد، به نحوی که برای هر دو نقطه A و B از فضا (یا صفحه)، برابری

$$k|AB| = |p(A)p(B)|$$

برقرار باشد. k را نسبت تشابه گویند.

ویژگی‌های تبدیل متشابه، در ضمیمه‌ها آمده است.

O را نقطه‌ای ثابت و $k \neq 0$ را عددی حقیقی می‌گیریم. تجانس H_0^k ، به مرکز O و نسبت k ، به تبدیلی از فضا (یا صفحه) گفته می‌شود که، در آن، مبدل (یا تصویر) هر نقطه A از فضا (یا صفحه)، متناظر با نقطه‌ای مثل B با ویژگی‌های زیر باشد:

(a) نقطه‌های A ، O و B روی یک خط راست‌اند؛

$$(b) |OB| = |k||OA|;$$

(c) اگر $A \neq O$ ، آن‌گاه، برای $k > 0$: $B \in [OA)$ و برای $k < 0$:

$$B \in \overline{OA})$$

ویژگی‌های تجانس را در ضمیمه‌ها آورده‌ایم.

تبدیل متشابه با نسبت $k = 1$ را تغییر مکان (یا تبدیل تعامدی) گویند.

بخش ۳.۱. پاره خط راست جهت‌دار. انتقال

پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ ، به وسیله زوج مرتب نقطه‌های A و B تعریف می‌شود. نقطه A را ابتدا و نقطه B را انتهای پاره خط راست



شکل ۹.۱

جهت‌دار $\vec{AB}$ گویند. پاره‌خط‌های راست جهت‌دار را، در شکل‌های هندسی، به کمک پیکانی که از ابتدا به انتهای آن می‌رود، مشخص می‌کنند (شکل ۹.۱). پاره خط جهت‌دار $\vec{BA}$ را، متقابل پاره خط جهت‌دار $\vec{AB}$ گویند (و با نماد $-\vec{AB}$ نشان می‌دهند). در حالتی که نقطه‌های A و B برهم منطبق

باشند، پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ ، یا دقیق‌تر، $\vec{AA}$ را، پاره خط صفر می‌نامند (و با نماد $\vec{0}_A$ نشان می‌دهند). مقدار $|AB|$ را برای طول $|\vec{AB}|$ ، یعنی طول پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ به کار می‌برند.

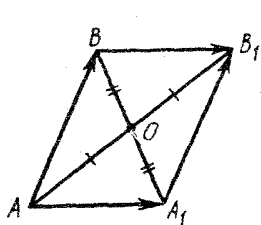
پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ را موازی با خط راست l (یا صفحهٔ P) گویند، وقتی که: یا برابر صفر باشد و یا خط راست (AB) با l (یا P) موازی باشد. پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ را، به شرطی که برابر صفر نباشد، عمود بر خط راست l (یا صفحهٔ P) گویند، وقتی که خط راست (AB) بر خط راست l (یا صفحهٔ P) عمود باشد. پاره خط‌های راست جهت‌دار $\vec{A_1B_1}, \dots, \vec{A_nB_n}$ را هم راستا گویند، وقتی که خط راستی مانند l وجود داشته باشد که با هر کدام از این پاره خط‌های راست جهت‌دار موازی باشد. برای نشان دادن هم راستائی (توازی) از نماد $\parallel$ و برای عمود بودن از نماد $\perp$ استفاده می‌کنیم. اگر پاره خط‌های راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ بر صفحه‌ای مثل P عمود باشند، آن وقت هم راستا هستند: $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$.

دو پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ را هم جهت گویند (و می‌نویسند: $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$)، وقتی که: یا یکی از آن‌ها برابر صفر باشد و یا $[AB] \uparrow [CD]$ ، یعنی وقتی که $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ هم راستا و نیم خط‌های راست $[AB]$ و $[CD]$ در یک امتداد باشند. دو پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ را، وقتی در خلاف جهت یکدیگر گویند (و می‌نویسند: $\vec{AB} \downarrow \vec{CD}$) که: یا یکی از آن‌ها برابر صفر باشد و یا $[AB] \downarrow [CD]$.

دو پاره خط راست جهت‌دار و هم جهت $\vec{AB}$ و $\vec{A'B'}$ را برابر (یا هم سنگ) گویند، وقتی که وسط پاره خط‌های راست $[AB]$ و $[A'B']$

برهم منطبق باشند (و می نویسند: $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$). از این تعریف، نتیجه می شود:

$$\vec{AB} = \vec{A_1B_1} \iff \vec{BB_1} = \vec{AA_1} \quad (10.1)$$



شکل ۱۰.۱

روشن است که تنها وقتی $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$ ، که داشته باشیم: $-\vec{AB} = -\vec{A_1B_1}$ با استفاده از مفهوم تقارن مرکزی، می توان ثابت کرد که تنها وقتی $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$ ، که نقطه ای مانند O وجود داشته باشد (نقطه وسط هر يك از دو پاره خط راست $[AB_1]$ و $[A_1B]$ ، به نحوی که (شکل های ۱۰.۱ و ۱۱.۱):

$$A_1 = Z_O(B), \quad B_1 = Z_O(A)$$

از ویژگی های متوازی الاضلاع می توان نتیجه گرفت که: دو پاره خط راست جهت دار $\vec{AB}$ و $\vec{A_1B_1}$ ، به شرطی که بر يك خط راست نباشند، تنها وقتی باهم برابری دارند که چهارضلعی ABB_1A_1 متوازی الاضلاع باشد (شکل ۱۰.۱). پاره خط های راست جهت دار برابر $\vec{AB}$ و $\vec{A_1B_1}$ ، وقتی روی يك خط راست باشند، می توانند به یکی از چهار حالتی که در شکل ۱۱.۱ نشان داده شده است، در آیند.

به این ترتیب، برای $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$ ، تنها وقتی امکان پذیر است که:

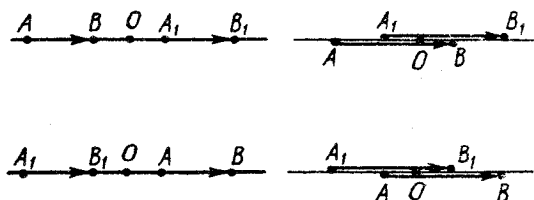
(a) پاره خط های راست جهت دار $\vec{AB}$ و $\vec{A_1B_1}$ هم راست باشند؛

(b) $\vec{AB} \uparrow \vec{A_1B_1}$ ؛

(c) $|\vec{AB}| = |\vec{A_1B_1}|$.

همان طور که از تعریف نتیجه می شود، هر پاره خط راست جهت دار

صفر، با هر پاره خط راست جهت دار صفر دیگر، برابر است؛ هر پاره خط راست جهت دار، با خودش برابر است؛ اگر $\vec{AB} = \vec{CD}$ ، آن گاه $\vec{CD} = \vec{AB}$ ؛ از ویژگی سرایت پذیری خط های راست موازی و برای عددهای حقیقی،



$$(a) [AB] \cap [A_1B_1] = \emptyset \quad (b) [AB] \cap [A_1B_1] \neq \emptyset$$

شکل ۱۱.۱

نتیجه می‌شود: اگر $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ ، آن گاه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. بنابراین، رابطه برابری پاره خط‌های راست جهت‌دار، دارای ویژگی سرایت پذیری است؛ این رابطه، یک رابطه هم‌ارزی (یا هم‌سنگی) است؛ و سرانجام، این رابطه، مجموعه پاره خط‌های راست جهت‌دار را افراز می‌کند، یعنی، هر کلاس هم‌ارزی، همه زوج پاره خط‌های راست جهت‌دار برابر را دربر می‌گیرد.

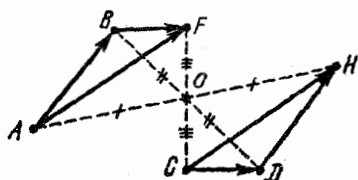
برای هر پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و هر نقطه C ، تنها یک نقطه D وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (نقطه D ، قرینه نقطه A نسبت به وسط پاره خط راست $[BC]$ است). وقتی بخواهیم، نقطه D را، با شرط $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، پیدا کنیم، می‌گویند: از نقطه C ، پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{CD}$ را برابر با $\overrightarrow{AB}$ رسم می‌کنیم. در این صورت می‌گویند: نقطه D از انتقال نقطه C به اندازه پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ به دست آمده است و می‌نویسند:

$$D = T_{\overrightarrow{AB}}(C)$$

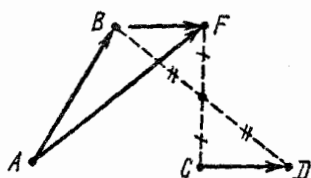
ویژگی‌های انتقال، در ضمیمه‌های کتاب آمده است.

بخش ۴.۱. جمع پاره خط‌های راست جهت‌دار ترکیب انتقال‌ها

مجموع دو پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ ، به صورت $\vec{AB} + \vec{CD}$ نشان داده می‌شود و برابر است با پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AF}$ که، در آن، $F = T_{\vec{CD}}(B)$ (شکل ۱۲.۱).



شکل ۱۲.۱



شکل ۱۳.۱

عمل پیدا کردن مجموع را، جمع پاره خط‌های راست جهت‌دار گویند. دستورهای مربوط به جمع را، برای پاره خط‌های راست جهت‌دار، در زیر آورده‌ایم:

$$I. \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AB} + (-\vec{AB}) = \vec{0}_A = \vec{0}_C; \vec{AB} + \vec{0}_C = \vec{AB}$$

$$II. \text{اگر } \vec{C'D'} = \vec{CD} \text{، آن گاه } \vec{AB} + \vec{C'D'} = \vec{AB} + \vec{CD}$$

$$III. \text{ویژگی جابجایی در جمع. برای هر دو پاره خط راست}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CD} + \vec{AB} \text{، داریم: جهت‌دار } \vec{AB} \text{ و } \vec{CD}$$

□ F و H را دو نقطه‌ای می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\vec{BF} = \vec{CD}, \vec{DH} = \vec{AB}$$

(شکل ۱۳.۱). این، به معنای آن است که وسط پاره خط‌های راست $[BD]$ و $[CF]$ ، همچنین، وسط پاره خط‌های راست $[BD]$ و $[AH]$ برهم منطبق‌اند. در نتیجه، وسط پاره خط‌های راست $[CF]$ و $[AH]$ هم، بر یکدیگر منطبق می‌شوند، یعنی $\vec{AF} = \vec{CH}$. ولی بنا به تعریف، $\vec{AF}$ برابر $\vec{AB} + \vec{CD}$

و $\vec{CH}$ برابر با $\vec{CD} + \vec{AB}$ است. ■

اگر نقطه‌های A و C برهم منطبق باشند، نقطه‌های F و H هم بر یکدیگر منطبق می‌شوند (پاره خط‌های راست جهت‌دار $\vec{AF}$ و $\vec{CH}$ برابر و در ابتدای خود، با هم مشترک‌اند، بنابراین، در انتهای خود هم، با هم مشترک می‌شوند). اگر نقطه‌های $A=C$ و $B, F=H$ و D بر یک خط راست نباشند، چهار ضلعی $ABFD$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنا براین، قانون متوازی‌الاضلاع برقرار است (شکل ۱۴.۱): مجموع دو پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{AD}$ ، که در ابتدای A مشترک‌اند، برابر پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AF}$ است که، در آن، $[AF]$ ، قطر متوازی‌الاضلاع $ABFD$ است که روی پاره خط‌های راست $[AB]$ و $[AD]$ ، به عنوان دو ضلع، رسم شده است.

یادداشت. اگر $A \neq C$ ، بنا به تعریف مجموع پاره خط‌های راست

جهت‌دار

$$\vec{CH} = \vec{CD} + \vec{AB}, \quad \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{CD}$$

دو ابتدای مختلف دارند (به ترتیب A و C). پاره خط‌های راست $[AF]$ و $[CH]$ متفاوت‌اند، ولی پاره خط‌های راست جهت‌دار $\vec{AF}$ و $\vec{CH}$ برابرند.

IV. اگر $\vec{AB} = A_1\vec{B}_1$ و $\vec{CD} = C_1\vec{D}_1$ ، آن‌گاه

$$\vec{AB} + \vec{CD} = A_1\vec{B}_1 + C_1\vec{D}_1$$

V. ویژگی شرکت‌پذیری جمع. برای هر سه پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ ، $\vec{CD}$ و $\vec{PQ}$ ، همیشه داریم:

$$(\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{PQ} = \vec{AB} + (\vec{CD} + \vec{PQ}) \quad (۱۰۲)$$

□ فرض کنید: $F = T_{\vec{CD}}(B)$ و $H = T_{\vec{PQ}}(F)$ (شکل ۱۵.۱). با

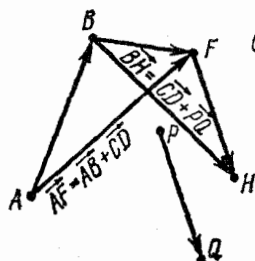
توجه به تعریف جمع داریم:

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{CD}, \quad \vec{AH} = \vec{AF} + \vec{PQ} = (\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{PQ}$$

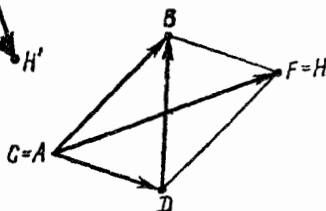
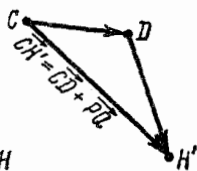
با توجه به IV: $\vec{BH} = \vec{CD} + \vec{PQ}$ ، پس بنا به تعریف جمع

$$\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{BH} = \vec{AB} + (\vec{CD} + \vec{PQ})$$

از این جا، با توجه به ویژگی سرایت پذیری در پاره خط‌های راست جهت دار، به برابری (۱۰۲) می‌رسیم. ■



شکل ۱۰.۱



شکل ۱۴.۱

یادداشت. با روش استقرا، می‌توان از گزاره V نتیجه گرفت که: جمع چند پاره خط راست جهت دار، مستقل از ترتیب پراکنشها در آن است. بنا بر این، مجموع پاره خط‌های راست جهت دار $\vec{A_1B_1}, \dots, \vec{A_2B_2}, \vec{A_1B_1}$ را می‌توان این طور نوشت:

$$\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n}$$

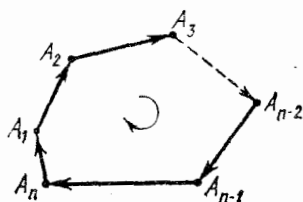
با توجه به گزاره III، این مجموع، مستقل از ترتیب جمله‌هاست. $A_1, A_2, \dots, A_n$ را، مجموعه‌ای متناهی از نقطه‌ها می‌گیریم. چندضلعی با رأس‌های متوالی این نقطه‌ها را، مسیر از نقطه A_1 تا A_n گویند. برای هر مسیر، دستود خط بسته برقرار است (شکل ۱۶.۱ را ببینید):

$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$$

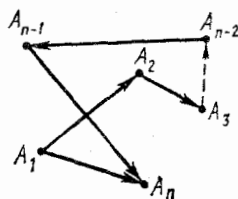
خط شکسته بسته $A_1A_2 \dots A_nA_1$ را یک دور (یا سیکل) گویند. برای هر دور، همیشه داریم (قاعده دور):

$$\vec{A_1 A_2} + \vec{A_2 A_3} + \dots + \vec{A_{n-1} A_n} + \vec{A_n A_1} = \vec{\theta_{A_1}} \quad (۱.۳)$$

در شکل ۱۷.۱، قاعده دور، برای دور $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ با پیکان نشان داده شده است.



شکل ۱۷.۱



شکل ۱۶.۱

با استفاده از ویژگی‌های 6° و 8° انتقال (ضمیمه‌ها را ببینید)، قاعده دور را می‌توان به این صورت نوشت: انتقال

$$T \xrightarrow{A_n A_1} \circ T \xrightarrow{A_{n-1} A_n} \circ \dots \circ T \xrightarrow{A_2 A_3} \circ T \xrightarrow{A_1 A_2}$$

یک انتقال همانی است.

تفاضل $\vec{AB} - \vec{CD}$ ، برای پاره خط‌های راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$

را، می‌توان به عنوان یک پاره خط راست جهت‌دار تعریف کرد:

$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + (-\vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{DC}$$

تفریق، عکس عمل جمع است: اگر برای پاره خط‌های راست جهت‌دار $\vec{AB}$ ، $\vec{CD}$ و $\vec{MN}$ داشته باشیم: $\vec{MN} + \vec{CD} = \vec{AB}$ ، آن‌گاه $\vec{MN} = \vec{AB} - \vec{CD}$. به زبان دیگر، پاره خط راست جهت‌دار را می‌توان با تغییر علامت، از یک طرف برابری به طرف دیگر آن منتقل کرد.

□ در واقع، اگر $\vec{AB} = \vec{MN} + \vec{CD}$ ، آن وقت اگر پاره خط

راست جهت دار $\vec{DC} = -\vec{CD}$ را به دو طرف برابری اضافه کنیم، به دست می آید:

$$\begin{aligned} \vec{AB} - \vec{CD} &= \vec{MN} + \vec{CD} + \vec{DC} = \vec{MN} + \vec{CC} \\ &= \vec{MN} + \vec{0} = \vec{MN} \end{aligned}$$

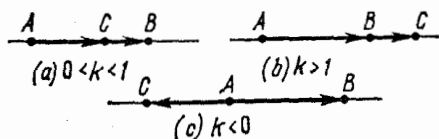
اگر $ABFD$ ، يك متوازی الاضلاع باشد (شکل ۱۴.۱ را ببینید)، آن وقت، پاره خط راست جهت دار $\vec{DB}$ ، $[DB]$ قطر متوازی الاضلاع است، برابر است با تفاضل $\vec{AB} - \vec{AD}$.

برای برداشتن پرانتزها، می توان از قاعده زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} (\vec{A_1B_1} - \vec{C_1D_1}) + \dots + (\vec{A_nB_n} - \vec{C_nD_n}) &= \\ = (\vec{A_1B_1} + \dots + \vec{A_nB_n}) - (\vec{C_1D_1} + \dots + \vec{C_nD_n}) \end{aligned}$$

بخش ۵.۱. ضرب پاره خط راست جهت دار در يك عدد

حاصل ضرب $\vec{AB} \times 0$ ، یعنی حاصل ضرب پاره خط راست جهت دار $\vec{AB}$ در عدد صفر، بنا به تعریف، برابر است با پاره خط جهت دار صفر، که با 0_A نشان می دهیم. بنا شرط $k \neq 0$ ، حاصل ضرب $k\vec{AB}$ ، یعنی حاصل ضرب پاره خط راست جهت دار $\vec{AB}$ در عدد k ، پاره خط راست جهت دار $\vec{AC}$ را مشخص می کند که، در آن، داریم: $C = H_A^k(B)$ (شکل ۱۸.۱ a, b, c).



پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AC}$ ، تنها وقتی برابر است با $k\vec{AB}$ که

(a) دو پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ هم راستا باشند؛

$$|\vec{AC}| = |k| |\vec{AB}| \quad (b)$$

(c) $\vec{AC} \uparrow \vec{AB}$ برای $k \geq 0$ و $\vec{AC} \downarrow \vec{AB}$ برای $k < 0$.

قانون‌های ضرب را به صورت گزاره‌های زیر تنظیم می‌کنیم:

$$(-1)\vec{AB} = -\vec{AB}, \quad 1 \times \vec{AB} = \vec{AB} \quad \text{I.}$$

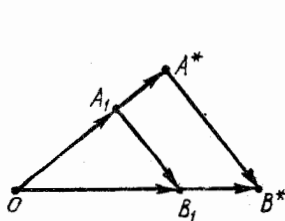
$$\text{II. اگر } \vec{AB} = \vec{CD}, \text{ آنگاه } k\vec{AB} = k\vec{CD}$$

III. برای هر دو عدد حقیقی k_1 و k_2 داریم:

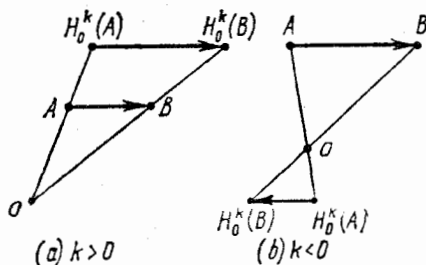
$$k_1(k_2\vec{AB}) = k_2(k_1\vec{AB}) = (k_1k_2)\vec{AB}$$

IV. اگر O نقطه‌ای دلخواه و $k \neq 0$ ، آنگاه (شکل ۱۹.۱):

$$\overrightarrow{H_0^k(A)H_0^k(B)} = k\vec{AB}$$



شکل ۲۰.۱



شکل ۱۹.۱

□ تبدیل تجانس H_0^k يك تبدیل تشابهی است با نسبت $|k|$. بنابراین

$$|\overrightarrow{H_0^k(A)H_0^k(B)}| = |k| |\vec{AB}|$$

با توجه به ویژگی ۲° از تجانس (ضمیمه کتاب را ببینید)، دو پاره خط

راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\overrightarrow{H_0^k(A)H_0^k(B)}$ هم راستا هستند و برای $k > 0$

هم جهت و برای $k < 0$ ، در خلاف جهت یکسایزگر. در نتیجه

$$\blacksquare \quad \overrightarrow{H_o^k(A)H_o^k(B)} = k\overrightarrow{AB}$$

V. برای دو پاره خط راست جهت دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و عدد حقیقی

k داریم:

$$k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD}$$

□ درستی برابری، برای $k = 0$ ، روشن است. فرض می‌کنیم $k \neq 0$

نقطه دلخواه O را در نظر می‌گیریم و قرار می‌گذاریم:

$$A_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(O), B_1 = T_{\overrightarrow{CD}}(A_1), A^* = H_o^k(A_1), B^* = H_o^k(B_1)$$

(شکل ۲۰.۱). با توجه به قاعده خط بسته:

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}, \quad \overrightarrow{OB^*} = \overrightarrow{OA^*} + \overrightarrow{A^*B^*}$$

از برابری‌های $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CD}$ ، نتیجه می‌شود:

$$k\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{AB}, \quad k\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{CD} \quad (\text{گزاره II})$$

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \quad (\text{بخش ۴.۱ گزاره IV})$$

بنا به تعریف تجانس $\overrightarrow{OA^*} = k\overrightarrow{OA_1}$ ، $\overrightarrow{OB^*} = k\overrightarrow{OB_1}$ ، سرانجام، با توجه به گزاره IV: $\overrightarrow{A^*B^*} = k\overrightarrow{A_1B_1}$ ، در نتیجه:

$$\overrightarrow{OB^*} = k\overrightarrow{OB_1} = k(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}),$$

$$\overrightarrow{OB^*} = \overrightarrow{OA^*} + \overrightarrow{A^*B^*} = k\overrightarrow{OA_1} + k\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD}$$

$$\blacksquare \quad k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD} \quad \text{و بنا بر این}$$

VI. برای پاره خط راست جهت دار $\overrightarrow{AB}$ و دو عدد حقیقی و دلخواه

k_1 و k_2 داریم:

$$(k_1 + k_2)\overrightarrow{AB} = k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{AB}$$

□ درستی این گزاره، به سادگی و با محاسبه طول پاره خط‌های

راست جهت دار، در دو طرف برابری، ثابت می‌شود؛ البته باید جهت آن‌ها را هم در نظر گرفت. ■

قانون‌های V و VI ضرب، قانون‌های توزیع پذیری ضرب‌اند.

فصل دوم

عمل‌های خطی با بردارها

بخش ۱.۲. تعریف‌های اصلی

يك بردار در فضا (یا در صفحه)، به عنوان مجموعه‌ای از پاره‌خط‌های راست جهت‌دار تعریف می‌شود که، ابتدا و انتهای هر يك از آن‌ها، متعلق به فضا (یا صفحه) باشد. بردارها را، معمولاً، با حرف‌های کوچک $a, b, c, \dots$ (و با قلم سیاه) نشان می‌دهند. اگر نقطه‌های A و B و بردار a طوری باشند که داشته باشیم: $\vec{AB} \in a$ ، آن وقت آن را به همان طریق پاره‌خط راست جهت‌دار

$\vec{AB}$ نشان می‌دهند؛ یعنی می‌نویسند:

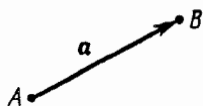
$\vec{AB} = a$ یا $a = \vec{AB}$. در این حالت،

پاره‌خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ را، نمایش

بردار a گویند و، در آن، علامت پیکان،

جهت بردار a را مشخص می‌کند (شکل

۱.۲). پاره‌خط‌های راست جهت‌دار



شکل ۱.۲

برابر (و فقط آن‌ها)، معرف يك بردار هستند؛ برعکس، اگر هم $\vec{AB}$ و هم $\vec{A'B'}$ معرف بردار a باشند، آن وقت

$$\vec{A'B'} = \vec{AB} \quad (2.1)$$

بنابراین، برابری (۲.۱)، بسته به جای خود، دو معنا دارد: اگر هر يك از دو طرف برابری، معرف يك پاره‌خط راست جهت‌دار باشد، آن وقت به معنای

برابری این دو پاره خط راست جهت‌دار است (بخش ۳.۱ را ببینید)؛ ولی اگر هر طرف رابطه (۲.۱) به معنای یک بردار باشد، آن وقت، رابطه (۲.۱) نشان می‌دهد که، این دو بردار برهم منطبق‌اند، یعنی دو مجموعه برابرند.

وقتی که بردار $\mathbf{a}$ را با پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم، پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ، بردار متقابل (یا بردار قرینه) بردار $\mathbf{a}$ را نشان می‌دهد (بنا نماد $-\mathbf{a}$). بردار صفر، به عنوان برداری تعریف می‌شود که متناظر با پاره‌خط راست جهت‌دار صفر باشد؛ روشن است که $0 = -0$. طول بردار $\mathbf{a}$ ، یعنی $|\mathbf{a}|$ ، بنا به تعریف، همان طول پاره‌خط راست جهت‌دار نمایش بردار $\mathbf{a}$ است. به ویژه روشن است که $0 = |0|$. بردارهای $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ ، $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ ، $\dots$ ، $\mathbf{a}_n = \overrightarrow{A_nB_n}$ را هم راستا گویند، وقتی که پاره‌خط‌های راست جهت‌دار نمایش آن‌ها، یعنی $\overrightarrow{A_1B_1}$ ، $\overrightarrow{A_2B_2}$ ، $\dots$ ، $\overrightarrow{A_nB_n}$ هم راستا باشند؛ به همین ترتیب، بردارهای هم صفحه را هم می‌توان تعریف کرد. هم راستایی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را با نماد $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ نشان می‌دهند؛ و اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نباشند، می‌نویسند: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. طبق این تعریف، بردار 0 با هر برداری هم راستا و با هر دو برداری هم صفحه است.

بردار $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ را موازی با خط راست l (یا صفحه P) گویند، وقتی که خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ ، نمایش بردار $\mathbf{a}$ ، موازی با l (یا P) باشد. با توجه به ویژگی سرایت‌پذیری توازی، در مجموعه خط‌های راست (در صفحه یا در فضا)، این تعریف، مستقل از انتخاب پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ ، به عنوان نمایش بردار $\mathbf{a}$ ، است.

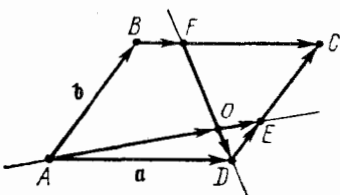
بردار غیر صفر $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ را عمود بر خط راست l (یا صفحه P) گویند، وقتی که $\overrightarrow{AB}$ ، بر خط راست l (یا صفحه P) عمود باشد. این تعریف هم، مستقل از انتخاب پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ ، به عنوان نمایش بردار $\mathbf{a}$ ، است، زیرا اگر پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ برابر باشند، آن وقت $(AB) \parallel (CD)$ و بنابراین $(CD) \perp l$ (یا $(CD) \perp P$). اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، بر صفحه P عمود باشند، هم راستا می‌شوند. بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ ، که بر صفحه P عمود باشد، بردار قائم (یا بردار نرمال) صفحه P گویند.

دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را هم جهت گویند (ومی نویسند: $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{b}$). وقتی که پاره خط‌های راست جهت دار $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ و $\overrightarrow{CD} = \mathbf{b}$ ، هم جهت باشند؛ به همین ترتیب، دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وقتی در دو جهت مخالف‌اند (ومی نویسند: $\mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$) که داشته باشیم: $\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD}$.

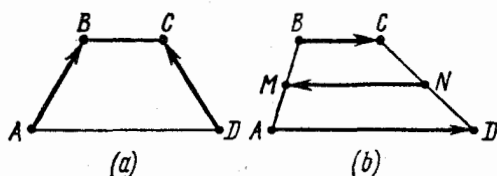
معیار برابری بردارها. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابرند (دو مجموعه منطبق)، تنها وقتی که: $(a) : \mathbf{a} \uparrow \mathbf{b}, (b) : |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

نمونه‌هایی از برابری، هم راستایی و هم صفحه بودن بردارها، به وسیله پاره خط‌های راست جهت دار، در شکل‌های هندسی از ۲.۲ تا ۷.۲ نشان داده شده است. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ (شکل ۲.۲)، بردارهای مربوط به شکل‌های روبه‌رو باهم برابرند: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. در دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ (شکل ۳.۲)،

برداری‌های ساق‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ برابر نیستند (چون هم راست نیستند)، اگرچه طولی برابر دارند: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. بردارهای $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ از دوزنقه $ABCD$ (شکل ۳.۲) با بردار خط میانه $\overrightarrow{NM}$ ، هم راست هستند، ولی برابر نیستند، چرا که طول‌های متفاوتی دارند. بردارهای $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ هم جهت‌اند، در حالی که، هر دوی آن‌ها، با بردار میانه $\overrightarrow{NM}$ در جهت‌های مختلف‌اند. درش ضلعی منظم $ABCDEF$ (شکل ۴.۲)، بردارهای ضلع‌های

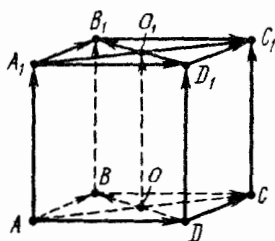


شکل ۲.۲

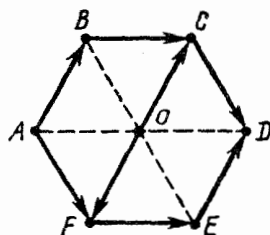


شکل ۳.۲

$\vec{AB}$ و $\vec{ED}$ و، همچنین، بردار $\vec{OC}$ (O)، مرکز شش ضلعی است، باهم برابرند، و $\vec{OF} = -\vec{AB}$ ، همچنین $\vec{BC} = \vec{FE}$ و $\vec{CD} = \vec{AF}$. در مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (شکل ۵.۲)، بردارهای یال‌های جانبی $\vec{AA}_1$ ، $\vec{BB}_1$ ، $\vec{CC}_1$ ، $\vec{DD}_1$ ، دوه دو باهم برابرند و، همچنین، هر کدام از آن‌ها، با بردار $\vec{OO}_1$ هم برابر است (O و O_1 ، به ترتیب، مرکزهای وجه‌های $ABCD$ و $A_1 B_1 C_1 D_1$ هستند). بردارهای قطرهای این دو وجه هم، باهم برابرند: $\vec{A_1 C_1} = \vec{AC}$ ، $\vec{A_1 B_1} = \vec{AB}$ ، $\vec{D_1 C_1} = \vec{DC}$ ، $\vec{D_1 B_1} = \vec{DB}$ ، $\vec{A_1 D_1} = \vec{AD}$ ، $\vec{A_1 C_1} = \vec{AC}$ ، $\vec{D_1 B_1} = \vec{DB}$ ، هم صفحه‌اند (زیرا با صفحه



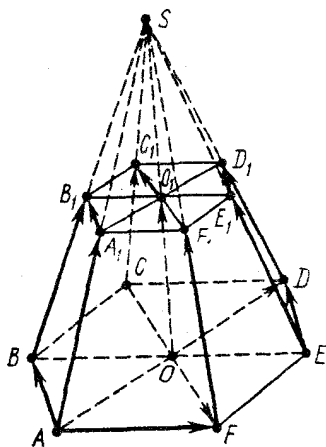
شکل ۵.۲



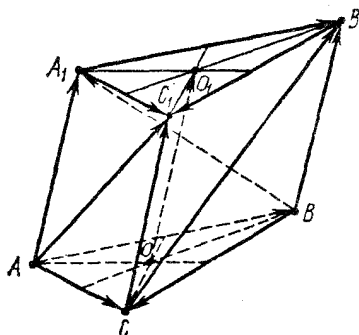
شکل ۴.۲

($ABCD$) موازی‌اند). در منشور با قاعده مثلث $ABCA_1 B_1 C_1$ (شکل ۶.۲)، بردارهای یال‌های جانبی $\vec{AA}_1$ ، $\vec{BB}_1$ ، $\vec{CC}_1$ ، با بردار $\vec{OO}_1$ برابرند (O و O_1 ، به ترتیب، مرکز هندسی، یعنی محل برخورد میانه‌های وجه‌های ABC و $A_1 B_1 C_1$ هستند). بردارهای ضلع‌های متناظر دو قاعده نیز، باهم برابرند: $\vec{AB} = \vec{A_1 B_1}$ ، $\vec{BC} = \vec{B_1 C_1}$ ، $\vec{AC} = \vec{A_1 C_1}$ ، $\vec{B_1 C_1} = \vec{BC}$ ، $\vec{A_1 B_1} = \vec{AB}$ ، $\vec{A_1 C_1} = \vec{AC}$ ، هم صفحه‌اند (با صفحه (ABC) موازی‌اند). در هرم ناقص با قاعده‌های شش ضلعی $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (شکل ۷.۲)، که در آن $\frac{|A_1 B_1|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ ، بردارهای $\vec{AB}$ ، $\vec{ED}$ ، $\vec{F_1 C_1}$ برابرند. بردارهای $\vec{A_1 B}$ و $\vec{CF}$ هم راستا، ولی در دو جهت مختلف‌اند. بردارهای

$\vec{OO}_1, \vec{FF}_1, \vec{CC}_1, \vec{C}_1F_1, \vec{CF}, \vec{D}_1E_1, \vec{DE}, \vec{A_1B_1}, \vec{AB}$ هم صفحه‌اند که، O_1 و O را، مرکزهای دو قاعدهٔ هرم گرفته‌ایم (زیرا با صفحهٔ (CC_1F_1F) موازی‌اند). بردارهای یال‌های جانبی $\vec{AA_1}$ و $\vec{BB_1}$ هم راستا نیستند، اگرچه طولی برابر دارند. بردارهای $\vec{DD_1}, \vec{CC_1}, \vec{BB_1}$ هم صفحه نیستند.



شکل ۷.۲



شکل ۶.۲

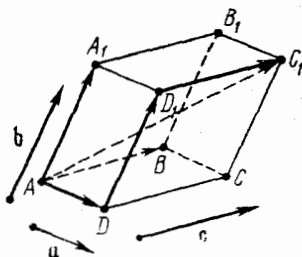
$\vec{a}$ را یک بردار و $\vec{AB}$ را، پاره‌خط راست جهت‌دار نمایش آن می‌گیریم. اگر $\vec{CD}$ پاره خط جهت‌داری باشد که باز هم بردار $\vec{a}$ را نمایش دهد، با توجه به تعریف بردار داریم: $\vec{CD} = \vec{AB}$ ، یعنی $\vec{CD} = T_{\vec{AB}}(C)$. بنا براین، $\vec{a}$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\vec{CD}$ ، که ابتدای آن‌ها از قبل در نظر گرفته شده و انتهای D آن‌ها، از تصویر نقطه‌های فضا (یا صفحه) در انتقال $T_{\vec{AB}}$ به دست آمده است. به همین مناسبت، بردار $\vec{a} = \vec{AB}$ را، بردار انتقال در امتداد پاره‌خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ گویند؛ و انتقال $T_{\vec{AB}}$ ، معرف انتقال به اندازهٔ بردار $\vec{a}$ است. در این حالت، $\vec{a}$ را به عنوان انتقال در فضا (یا صفحه) می‌پذیریم. $\vec{a} = \vec{AB}$ را

يك بردار و M را نقطه‌ای مفروض می‌گیریم. اگر به جای $\vec{AB}$ ، پاره‌خط راست جهت‌دار $\vec{MN} = \vec{AB}$ با ابتدای M را به‌کار ببریم، آن وقت، برای بردار a ، نقطه M ابتدا و نقطه N انتها خواهد بود.

از آن جا که هر پاره‌خط راست جهت‌داری را می‌توان با پاره‌خط راست جهت‌دار دیگری که با آن برابر باشد، عوض کرد، همه ویژگی‌های پاره‌خط‌های راست جهت‌دار و همه قانون‌های عمل مربوط به آن‌ها را، می‌توان درباره بردارها هم، درست دانست.

بخش ۲.۲. جمع بردارها. تفاضل بردارها

اگر $a = \vec{AB}$ و $b = \vec{CD}$ بردارهایی باشند که، به ترتیب، با



پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ نمایش داده شده‌اند، آن وقت، برداری را که نمایش آن پاره‌خط راست جهت‌دار $\vec{AB} + \vec{CD}$ باشد، مجموع بردارهای a و b گویند (و می‌نویسند: $a+b$). از گزاره IV بخش ۴.۱، می‌توان نتیجه گرفت که: این تعریف برای جمع بردارها، مستقل از انتخاب پاره‌خط‌های راست جهت‌داری است که این بردارها را نمایش می‌دهند.

شکل ۸.۲

ویژگی‌های جمع بردارها

$$a+b=b+a. \text{ I (ویژگی جابه‌جائی)};$$

$$(a+b)+c=a+(b+c). \text{ II (ویژگی شرکت‌پذیری)};$$

$$a+0=a. \text{ III}$$

$$a+(-a)=0. \text{ IV}$$

این ویژگی‌ها، از گزاره‌های III، V و I در بخش ۴.۱ نتیجه می‌شوند. با توجه به ویژگی شرکت‌پذیری، می‌توان مجموع سه بردار (یا بیشتر) را، بدون در نظر گرفتن پرانتزها نوشت. به عنوان مثال، در متوازی‌السطوح $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ (شکل ۸.۲)، بردار $\vec{AC}$ را می‌توان به صورت مجموع بردارهای $\vec{AD} + \vec{DD_1} + \vec{D_1C_1} = \vec{AD} + \vec{AA_1} + \vec{A_1B_1} + \vec{B_1C_1}$ نوشت. این حقیقت را، قاعده متوازی‌السطوح می‌گویند: اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ روی یک صفحه نباشند، آن وقت، مجموع آن‌ها $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ، به وسیله قطر متوازی‌السطوحی نشان داده می‌شود که روی پاره‌خط‌های راست‌جهت‌دار نمایش این بردارها، با ابتدای مشترک، ساخته شده باشد (کوتاه‌تر: متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ ساخته شده باشد).

تفاضل $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ، بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، به عنوان بردار $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ تعریف می‌شود. اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، به ترتیب، با پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ نشان داده شده باشند، آن وقت، تفاضل $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ، با پاره‌خط راست جهت‌دار $\vec{AB} - \vec{CD}$ نشان داده می‌شود (بخش ۴.۱ را ببینید). اگر $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ ، آن‌گاه $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. این ویژگی، از ویژگی متناظر آن، در مورد تفاضل دو پاره‌خط راست جهت‌دار نتیجه می‌شود. در این جا، نشان می‌دهیم که چگونه، این ویژگی‌ها، از ویژگی‌های مربوط به جمع بردارها نتیجه می‌شود. اگر بردار $-\mathbf{b}$ را به دو طرف برابری $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{c} + (-\mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a}$$

$$+ (\mathbf{b} + (-\mathbf{b})) = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

بنابراین، در برابری‌های برداری، می‌توان جمله‌ها را، با تغییر علامت، از طرفی به طرف دیگر منتقل کرد.

مثال ۱۰.۲.۲. قاعده حذف پرانتزها را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) + \dots + (\mathbf{a}_n - \mathbf{b}_n) = \\ & = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) - (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n) \end{aligned}$$

حل. با توجه به تعریف تفاضل دو بردار

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n) =$$

$$= (a_1 + (-b_1)) + (a_2 + (-b_2)) + \dots + (a_n + (-b_n))$$

این عبارت را x می‌نامیم؛ با توجه به ویژگی شرکت پذیری جمع بردارها، می‌توان پرانتزها را حذف کرد:

$$x = a_1 + (-b_1) + a_2 + (-b_2) + \dots + a_n + (-b_n)$$

و اگر چند بار، از قانون جابه‌جایی جمع بردارها استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (-b_1) + (-b_2) + \dots + (-b_n)$$

اکنون مجموع $(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ را به x اضافه می‌کنیم، با استفاده از قانون‌های شرکت پذیری و جابه‌جایی جمع بردارها و با توجه به قانون‌های III و IV در جمع بردارها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \\ &+ (-b_1) + (-b_2) + \dots + (-b_n) + b_1 + b_2 + \dots + b_n = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + (-b_1)) + (b_2 + (-b_2)) + \dots + \\ &+ (b_n + (-b_n)) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 0 + 0 + \dots + 0 = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

که سرانجام، با توجه به قاعده انتقال جمله‌ها، از یک طرف به طرف دیگر برابری، نتیجه می‌شود:

$$x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

مثال ۲۰۲.۲. اگر O مرکز شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ باشد (شکل

۴۰۲)، مجموع $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}$ را پیدا کنید.

حل. قطرهای شش ضلعی منتظم، در نقطه O به هم می‌رسند و، در آن‌جا،

یکدیگر را نصف می‌کنند. نیم‌خط‌های راست $[OA]$ و $[OD]$ ، در دو جهت مختلف‌اند، بنا براین $\vec{OA} = -\vec{OD}$. به همین ترتیب
 $\vec{OB} = -\vec{OE}$, $\vec{OC} = -\vec{OF}$

از آن‌جا

$$\vec{OA} + \vec{OD} = \vec{0}, \quad \vec{OB} + \vec{OE} = \vec{0}, \quad \vec{OC} + \vec{OF} = \vec{0}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} &= (\vec{OA} + \vec{OD}) + \\ &+ (\vec{OB} + \vec{OE}) + (\vec{OC} + \vec{OF}) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

در شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ ، این برابری هم برقرار است:

$$\vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} = \vec{0}$$

در واقع، چون $ODEF$ متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$$\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OF}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} &= (\vec{AO} + \vec{OD}) - (\vec{BO} + \vec{OE}) + (\vec{CO} + \vec{OF}) = \\ &= \vec{OD} + \vec{OD} - (\vec{OE} + \vec{OE}) + \vec{OF} + \vec{OF} = (\vec{OD} + \vec{OF}) + \\ &+ (\vec{OD} + \vec{OF}) - (\vec{OE} + \vec{OE}) = (\vec{OE} + \vec{OE}) - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \\ &= (\vec{OE} - \vec{OE}) + (\vec{OE} - \vec{OE}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

مثال ۳.۲.۲. ثابت کنید، در مثلث ABC ، میانه‌های $[AK]$ ، $[CM]$

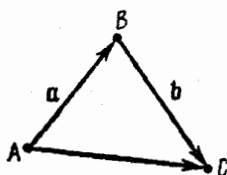
و $[BN]$ ، در یک نقطه به هم می‌رسند و اگر Q ، نقطه برخورد این میانه‌ها باشد، آن وقت

$$\vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC} = \vec{0}$$

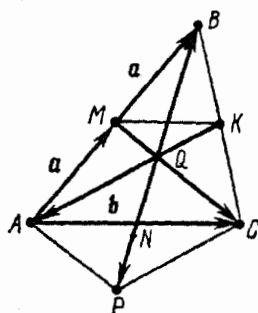
حل. Q را محل برخورد پاره‌خط‌های راست $[AK]$ و $[CM]$

می گیریم (شکل ۹.۲). بنابر ویژگی پاره خط راستی که وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل می کند، داریم: $(MK) \parallel (AC)$. از این رو، مثلث های QMK و QCA ، به دلیل برابر بودن زاویه های متناظر، متشابه اند، یعنی

$$\frac{|QC|}{|MQ|} = \frac{|QA|}{|KQ|} = \frac{|AC|}{|MK|} = 2$$



شکل ۱۰.۲



شکل ۹.۲

به این ترتیب، نقطه Q ، پاره خط راست $[AK]$ را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می کند. همین نقطه Q ، میانه $[CM]$ را هم به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می کند:

$$|CQ| : |QM| = 2$$

اکنون، اگر به جای میانه های $[AK]$ و $[CM]$ ، دو میانه $[AK]$ و $[BN]$ را در نظر بگیریم، به طریق مشابهی ثابت می شود که، نقطه Q ، بر میانه $[BN]$ قرار دارد و آن را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می کند:

$$|BQ| : |QN| = 2$$

در نتیجه، سه میانه مثلث، در نقطه Q به هم می رسند.

برای نقطه P ، قرینه نقطه Q نسبت به نقطه N (شکل ۹.۲)، داریم:
 $\vec{QB} = -\vec{QP}$. چون $P = Z_N(Q)$ و $A = Z_N(C)$ ، بنا براین، چهار ضلعی
 $AQCP$ متوازی‌الاضلاع است، یعنی

$$\vec{QA} + \vec{QC} = \vec{QP}$$

و سرانجام، به دست می‌آید:

$$\vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC} = \vec{QP} + \vec{QB} = \vec{QP} + (-\vec{QP}) = \vec{0}$$

مثال ۴.۲.۲. ثابت کنید، برای هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، نابرابری‌های مثلثی
 زیر برقرارند:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \quad (۲.۲)$$

تحقیق کنید، برای $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ ، تنها وقتی برقرار است که
 داشته باشیم: $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$ ؛ همچنین، برای $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ ، تنها وقتی
 برقرار است که داشته باشیم: $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$ و $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$.

حل. در حالتی که یکی از دو بردار $\mathbf{a}$ یا $\mathbf{b}$ برابر صفر باشد، درستی
 نابرابری‌ها روشن است. اکنون، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را بردارهای غیر صفر می‌گیریم و
 فرض می‌کنیم، پاره‌خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ ، نمایش بردار $\mathbf{a}$ باشد. بردار
 $\mathbf{b} = \vec{BC}$ را از نقطه B در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰.۲). پاره‌خط راست
 جهت‌دار $\vec{AC}$ ، بردار $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ را نمایش می‌دهد. با توجه به ویژگی‌های 30°
 و 40° برای فاصله (بخش ۱.۱ را ببینید)، داریم:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\vec{AC}| \leq |\vec{AB}| + |\vec{BC}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

علامت برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم $B \in [AC]$ ، یعنی وقتی
 که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در یک جهت باشند ($\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$).

اگر در نابرابری $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ ، به جای بردار $\mathbf{a}$ ، بردار
 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$|(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| + |\mathbf{b}|$$

و در نتیجه $|a-b| \geq |a| - |b|$. بنابر آن چه در بالا گفتیم، در این جا،
برابری $|a-b| = |a| - |b|$ ، تنها وقتی برقرار می شود که بردارهای
 $a-b$ و b هم جهت باشند، یعنی وقتی که بردارهای b و $a = (a-b) + b$
دارای يك جهت باشند که، در ضمن

$$|a| = |a-b| + |b| \geq |b|$$

مثال ۵.۲.۲. A, B, C, D ، چهار

نقطه از فضا (یا صفحه) اند. M را وسط

$[AB]$ ، N را وسط $[CD]$ و O را وسط

$[MN]$ می گیریم. ثابت کنید:

$$(۱) \quad \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$$

$$(۲) \quad \vec{MN} + \vec{MN} = \vec{BC} + \vec{AD}$$

$$(۳) \quad |MN| \leq \frac{1}{2}(|BC| + |AD|)$$

حل. (۱) پاره خط های راست

جهت دارند $\vec{AM} = \vec{MB}$ ، معرف يك بردارند

که، آن را، با a نشان می دهیم. به همین

ترتیب، فرض می کنیم:

$$\vec{CN} = \vec{ND} = b, \quad \vec{MO} = \vec{ON} = c$$

(شکل ۱۱.۲). بنابر این

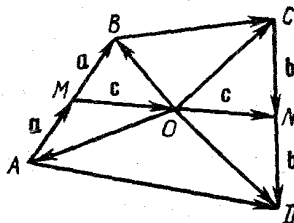
$$\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA} = (-c) + (-a), \quad \vec{OB} = a - c,$$

$$\vec{OC} = c - b, \quad \vec{OD} = b + c$$

به این ترتیب، با توجه به مثال ۱.۲.۲، داریم:

$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} &= (-c) + (-a) + a - c + c - b + \\ &+ b + c = (a - a) + (c - c) + (b - b) + (c - c) = \vec{0} + \\ &+ \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

(۲) بنابر قاعده دور بسته، داریم:



شکل ۱۱.۲

$$\vec{BC} = \vec{BM} + \vec{MN} + \vec{NC}, \quad \vec{AD} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{ND}$$

از این‌رو:

$$\begin{aligned} \vec{BC} + \vec{AD} &= (\vec{BM} + \vec{AM}) + \vec{MN} + \vec{MN} + (\vec{NC} + \vec{ND}) = \\ &= \mathbf{0} + \vec{MN} + \vec{MN} + \mathbf{0} = \vec{MN} + \vec{MN} \end{aligned}$$

(۳) با توجه به نابرابری مثلثی

$$|\vec{BC} + \vec{AD}| \leq |\vec{BC}| + |\vec{AD}| = |BC| + |AD|$$

و چون $\vec{MN} \uparrow \vec{MN}$ ، خواهیم داشت:

$$|\vec{MN} + \vec{MN}| = |\vec{MN}| + |\vec{MN}| = 2|MN|$$

(مثال ۴.۲.۲ را ببینید). به این ترتیب، سرانجام، به دست می‌آید:

$$2|MN| = |\vec{MN} + \vec{MN}| = |\vec{BC} + \vec{AD}| \leq |BC| + |AD|$$

مثال ۶.۲.۲. برای $-(-a) = a$ ، برای هر بردار دلخواه a ،

ثابت کنید.

حل. $x = -(-a)$ می‌گیریم. بنا به قانون‌های I و IV جمع بردارها،

داریم: $x + (-a) = \mathbf{0}$. بردار a را به هر دو طرف این برابری اضافه می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$a = \mathbf{0} + a = x + (-a) + a = x + (a + (-a)) = x + \mathbf{0} = x$$

بخش ۳.۲. ضرب بردار در عدد.

معیاری برای هم‌راستا بودن بردارها

پاره‌خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ را نمایش بردار a ، و k را عدد حقیقی

می‌گیریم. حاصل ضرب ka (حاصل ضرب بردار a در عدد حقیقی k)، به

نوان برداری تعریف می‌شود که، نمایش آن، پاره‌خط راست جهت‌دار $k\vec{AB}$

ند. ضرب ka را به صورت ak هم می‌توان نوشت. در حالت $k \neq 0$ ،

ضرب $\frac{1}{k}a$ ، به صورت $\frac{a}{k}$ هم نوشته می‌شود.

قانون‌های ضرب بردار در يك عدد

$$I. \quad (-1)a = -a, k0 = 0, 0.a = 0, 1.a = a.$$

$$II. \quad |ka| = |k||a|$$

III. اگر $k \geq 0$ آن‌گاه $ka \uparrow \uparrow a$ ، و اگر $k \leq 0$ آن‌گاه $ka \downarrow \downarrow a$ ؛
اگر k و m دو عدد حقیقی و a و b دو بردار دلخواه باشند، آن‌گاه:

$$IV. \quad k(ma) = (km)a \quad (\text{جاب‌جایی ضرب در عدد})$$

$$V. \quad (k+m)a = ka + ma \quad (\text{شرکت‌پذیری ضرب در عدد})$$

$$VI. \quad k(a+b) = ka + kb$$

این ویژگی‌ها، به طور مستقیم، از ویژگی‌های ضرب پاره خط راست جهت‌دار در يك عدد به دست می‌آیند (بخش ۵.۱ را ببینید).

مثال ۲.۳.۲. ثابت کنید: $-a = (-1)a$ (با استفاده از بقیه

قانون‌های ضرب بردار در يك عدد).

حل. داریم: $0 = 0.a = (1 + (-1))a$ از این‌جا

$$-a = (-a) + 0 = (-a) + (1 + (-1))a = (-a) + 1.a +$$

$$+ (-1)a = ((-a) + a) + (-1)a = 0 + (-1)a = (-1)a$$

مثال ۲.۳.۲. ثابت کنید، اگر $ma + nb = ka + lb$ ، آن‌گاه

$$(m-k)a + (n-l)b = 0$$

حل. بردارها را از سمت راست به سمت چپ برابری منتقل می‌کنیم:

$$ma + nb = ka + lb \Rightarrow (ma - ka) + (nb - lb) = 0$$

بنابر قانون‌های I و IV از ضرب بردار در يك عدد، داریم:

$$-ka = (-1).(ka) = (-k)a$$

و بنا بر قانون V

$$ma - ka = ma + (-ka) = ma + (-k)a = (m - k)a$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$nb - lb = (n - l)b$$

در نتیجه

$$ma + nb = ka + lb \iff (m - k)a + (n - l)b = 0$$

با توجه به قانون‌های II و III، می‌توان معیاری برای هم‌داستانی بردارها به دست آورد: بردار b ، تنها وقتی با بردار غیر صفر a هم‌راستا است که، عددی مانند k وجود داشته باشد، به نحوی که داشته باشیم: $b = ka$. در ضمن، وقتی بردارهای $a \neq 0$ و b مفروض باشند، k ، عددی منحصر به فرد

است، به نحوی که $|k| = \frac{|b|}{|a|}$ ؛ یعنی، اگر $a \uparrow \uparrow b$ ، آن‌گاه $k = \frac{|b|}{|a|}$ و اگر

$$a \uparrow \downarrow b \text{، آن‌گاه } k = -\frac{|b|}{|a|}$$

مثال ۳.۳.۲. ثابت کنید، برای $ma + nb = 0$ ، برای بردارهای

ناهم‌راستای a و b ، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $m = n = 0$.
حل. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. a و b را بردارهای ناهم‌راستایی می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $ma + nb = 0$ و $m \neq 0$ ؛ در این صورت، داریم:

$$0 = \left(\frac{1}{m}\right)0 = \left(\frac{1}{m}\right)(ma + nb) = \left(\frac{1}{m}\right)(ma) +$$

$$+ \left(\frac{1}{m}\right)(nb) = 1 \cdot a + \left(\frac{n}{m}\right)b = a - \left(-\frac{n}{m}\right)b$$

یعنی $a = \left(-\frac{n}{m}\right)b$. بنا بر این، با توجه به معیار هم‌راستایی، باید بردارهای

a و **b** هم راستا باشند، که با فرض ناهم راستا بودن **a** و **b**، متناقض است. به همین طریق، می توان ثابت کرد که، فرض $n \neq 0$ هم، به تناقض می انجامد. مثال ۴۰.۳.۲. ثابت کنید، برای بردارهای ناهم راستای **a** و **b**، برابری

$$m_1 a + n_1 b = m_2 a + n_2 b \quad (2.3)$$

با دستگاه معادله های زیر هم ارز است:

$$m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2 \quad (2.4)$$

حل. در مثال ۲۰.۳.۲ دیدیم که برابری (۲.۳)، هم ارز است با برابری

$$(m_1 - m_2)a + (n_1 - n_2)b = 0 \quad (*)$$

بردارهای **a** و **b** هم راستا نیستند، بنا براین، با توجه به مسئله ۳۰.۳.۲،

برابری (*) هم ارز است با برابری های $m_1 - m_2 = 0$ و $n_1 - n_2 = 0$.

مثال ۵۰.۳.۲. بردارهای **a** و **b**، هم راستا نیستند. به ازای چه مقداری

از x ، دو بردار زیر هم راستا می شوند:

$$c = (x-1)a + b, \quad d = (2+3x)a - 2b$$

حل. بردار $c = (x-1)a + b$ غیر صفر است، زیرا اگر داشته باشیم:

$$0 = c = (x-1)a + 1.b$$

آن وقت، با توجه به مثال ۳۰.۳.۲ برای بردارهای ناهم راستای **a** و **b**، باید

برابری های $x-1=0$ و $1=0$ برقرار باشد که ممکن نیست.

بنابر معیار هم راستائی، دو بردار **c** و **d**، تنها وقتی هم راستا می شوند

که عددی مثل y وجود داشته باشد، به نحوی که برای آن، داشته باشیم:

$$d = yc$$

$$(2+3x)a - 2b = y(x-1)a + yb$$

بردارهای **a** و **b** هم راستا نیستند، بنا براین، با توجه به مثال ۴۰.۳.۲، باید

داشته باشیم:

$$2+3x = y(x-1), \quad y = -2$$

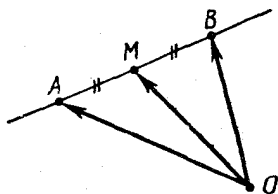
که از آن‌جا به دست می‌آید: $x = 0$ و $y = -2$. به این ترتیب، بردارهای c و d ، تنها وقتی هم‌راستا می‌شوند که $x = 0$ ، یعنی

$$c = -a + b, \quad d = 2(a - b)$$

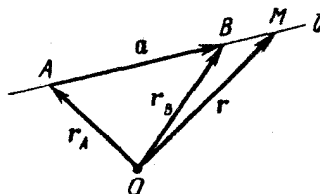
اگر O ، نقطه ثابتی از فضا یا صفحه باشد (که آن را قطب می‌نامیم)، آن وقت، بین نقطه‌های A (از فضا یا صفحه) و پاره خط راست جهت‌دار $\vec{OA}$ ، تساظر يك به يك برقرار است. بردار r_A را، که با پاره خط راست جهت‌دار $\vec{OA}$ نمایش داده می‌شود، شعاع حامل نقطه A نسبت به قطب O گویند. برای شعاع حامل مفروض r_A ، نقطه A ، با انتهای بردار r_A ، که به قطب O وصل شده است، مشخص می‌شود.

مثال ۶.۳.۲. (معادله بردار پارامتری خط راست). نقطه ثابت O را، به عنوان قطب، در فضا (یا صفحه) در نظر می‌گیریم. به جز آن، l را خط راستی فرض می‌کنیم که از دو نقطه متمایز A و B گذشته باشد. مجموعه همه شعاع‌های حامل نقطه‌های واقع بر خط راست l را مشخص کنید.

حل. r_B و r_A را، به ترتیب، شعاع‌های حامل دو نقطه A و B فرض می‌کنیم. برداری را که به وسیله پاره خط راست جهت‌دار $\vec{AB}$ نمایش داده می‌شود، a می‌نامیم، یعنی $a = r_B - r_A$ (شکل ۱۲.۲). شعاع حامل نقطه دلخواه M از خط راست l را با r نشان می‌دهیم.



شکل ۱۲.۲



شکل ۱۲.۲

نقطه M ، تنها وقتی بر خط راست l واقع است که، بردارهای $\vec{AM}$ و a هم‌راستا باشند. با توجه به معیار هم‌راستائی، این وضع تنها وقتی امکان دارد که عددی مانند t (وابسته به M) وجود داشته باشد، به نحوی که برای آن، داشته باشیم: $\vec{AM} = ta$. چون $\vec{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ ، بنابراین، بردار $\mathbf{r}$ ، تنها وقتی می‌تواند شعاع حامل نقطه $M \in l$ باشد که بتوان، آن را، به صورت $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + ta$ نشان داد که، آن، $a = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ ، به این ترتیب، مجموعه همه شعاع‌های حامل نقطه‌های متعلق به خط راست l ، مجموعه‌ای است از بردارهای به صورت

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + ta \quad (2.5)$$

که در آن $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A$ ، $a = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ و t عددی حقیقی است. بردار a را، بردار هادی خط راست l ، $\mathbf{r}_A$ را شعاع حامل نقطه آغاز خط راست l ، t را پارامتر و رابطه (۲.۵) را، معادله بردار پارامتری خط راست گویند.

رابطه (۲.۵) را می‌توان، به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_A + t\mathbf{r}_B \quad \text{یا} \quad \mathbf{r} = t\mathbf{r}_A + (1-t)\mathbf{r}_B$$

که در آن‌ها، t و $1-t$ دو عدد حقیقی دلخواهند که با برابری $t + (1-t) = 1$ به هم مربوط شده‌اند. در واقع، دستگاه معادله‌های

$$\mathbf{r} = t\mathbf{r}_A + (1-t)\mathbf{r}_B, \quad t + (1-t) = 1$$

معادله پارامتری خط راستی را می‌دهد که از دو نقطه A و B گذشته است. عددهای $t = t(M)$ و $1-t = 1-t(M)$ را، مختصات گرانیه‌گاهی نقطه M روی خط راست (AB) (در امتداد بردار a) گویند.

مفهوم هندسی پارامتر t را، در رابطه (۲.۵)، روشن می‌کنیم. چون $\vec{AM} = ta$ و $t = t(M)$ ، بنابراین $|\vec{AM}| = |t||a|$ ، یعنی $|t| = \frac{|\vec{AM}|}{|a|}$. عدد t وقتی مثبت است که، نقطه $M \neq A$ بر $[AB]$ واقع باشد، و با $B \in [AM]$ ؛ عدد t وقتی منفی است که $M \neq A$ و $A \in [MB]$ ؛ $t = 0$ است، تنها وقتی که نقطه M بر A منطبق باشد.

مثال ۷.۳.۲. (تقسیم پاره خط راست، به نسبت معلوم). A و B را دو نقطه متمایز باشعاع‌های حامل $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ نسبت به قطب O ، و λ را عددی مثبت فرض می‌کنیم. می‌خواهیم $\mathbf{r}_M$ ، شعاع حامل نقطه M از پاره خط راست $[AB]$ را پیدا کنیم، به شرطی که بدانیم، نقطه M ، پاره خط راست $[AB]$ را (از طرف A) به نسبت λ تقسیم کرده است.

حل. نقطه M ، روی خط راست (AB) و بین دو نقطه A و B قرار دارد، بنابراین

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_A + t(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$$

که در آن $t = \frac{|AM|}{|AB|} > 0$. با فرض $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$ ، به دست می‌آید:

$$|AB| = |AM| + |MB| = |AM| + \frac{1}{\lambda}|AM| = \frac{\lambda + 1}{\lambda}|AM|$$

$$\text{بنابراین } t = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \text{ و}$$

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda + 1}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \frac{1}{\lambda + 1}\mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda + 1}\mathbf{r}_B$$

و رابطه

$$\mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{\lambda + 1} \quad (۲.۶)$$

دستور تقسیم يك پاره خط راست، به نسبت معلوم است.

به ازای $\lambda = 1$ ، نقطه M وسط پاره خط راست $[AB]$ و پاره خط راست $[OM]$ ، میانه مثلث OAB می‌شود (شکل ۱۳.۲). در این حالت، بردار $\mathbf{r}_M = \vec{OM}$ ، برابر است با

$$\frac{1}{2}\mathbf{r}_A + \frac{1}{2}\mathbf{r}_B = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

مثال ۸.۳.۲. با استفاده از بردارها و عمل بر روی آن‌ها، ثابت کنید،

میان‌های مثلث، در يك نقطه به هم می‌رسند و، این نقطه، به فاصله $\frac{2}{3}$ میان‌ه از رأس و به فاصله $\frac{1}{3}$ میان‌ه از ضلع مقابل است.

حل. M و K را، به ترتیب، وسط ضلع‌های $[BC]$ و $[AB]$ ، و Q را نقطه برخورد میان‌های $[AK]$ و $[CM]$ می‌گیریم (شکل ۹.۲ را ببینید). فرض می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{|CQ|}{|QM|}, \quad \mu = \frac{|AQ|}{|QK|}$$

و ثابت می‌کنیم: $\mu = \lambda = 2$. $\vec{AM} = \mathbf{a}$ (پس $\vec{AB} = 2\mathbf{a}$) و $\vec{AC} = \mathbf{b}$ می‌گیریم. نقطه Q ، پاره خط راست $[CM]$ را به نسبت λ تقسیم کرده است، با استفاده از دستور تقسیم پاره خط راست، داریم:

$$\vec{AQ} = \frac{\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a}}{\lambda + 1}$$

در نتیجه

$$\vec{AK} = \vec{AQ} + \vec{QK} = \vec{AQ} + \frac{\vec{AQ}}{\mu} = \frac{\mu + 1}{\mu} \cdot \frac{\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a}}{\lambda + 1}$$

نقطه K پاره خط راست $[CB]$ را، به نسبت $1:1$ تقسیم می‌کند، بنا بر این

$$\vec{AK} = \frac{\vec{AC} + \vec{AB}}{2} = \frac{\mathbf{b} + 2\mathbf{a}}{2}$$

با مقایسه دو مقدار $\vec{AK}$ به دست می‌آید:

$$\frac{\mu + 1}{\mu} \cdot \frac{\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a}}{\lambda + 1} = \frac{\mathbf{b} + 2\mathbf{a}}{2}$$

با توجه به این‌که، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نیستند، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\mu+1}{\mu} \cdot \frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{2}, \frac{\mu+1}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+1} = 1$$

که از تقسیم آن‌ها بر یکدیگر، به دست می‌آید: $\lambda = 2$. سپس

$$\frac{\mu+1}{\mu} = \frac{3}{2} \Rightarrow \mu = 2$$

به این ترتیب، معلوم می‌شود که، نقطه Q ، بر میانه $[CM]$ قرار دارد و آن را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند؛ همچنین، نقطه Q ، روی میانه $[AK]$ واقع است و آن را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که نقطه Q از میانه $[CM]$ ، بر میانه $[BN]$ هم قرار دارد و آن را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند؛ یعنی، سه میانه در یک نقطه به هم می‌رسند و، این نقطه، هر یک از میانه‌ها را به نسبت ۲:۱، از طرف رأس به طرف ضلع، تقسیم می‌کند.

مثال ۹.۳.۲. عدد k را طوری پیدا کنید که اگر در بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ ضرب شود، طول بردار $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ برابر واحد باشد و در ضمن: $\mathbf{a}$ (بردار $\mathbf{b}$ هم جهت با بردار $\mathbf{a}$ باشد، $\mathbf{b}$) بردار $\mathbf{b}$ در خلاف جهت بردار $\mathbf{a}$ باشد. حل. (a) چون $k \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \uparrow \mathbf{b} \Leftrightarrow k\mathbf{a} \uparrow \mathbf{a}$ ، بنابراین

$$k = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \quad (\text{II})$$

(b) داریم: $k \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \downarrow \mathbf{b} \Leftrightarrow k\mathbf{a} \downarrow \mathbf{a}$ ، در نتیجه

$$-k = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \quad \text{و} \quad k = -\frac{1}{|\mathbf{a}|}$$

به این ترتیب، بردار $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ با بردار $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ هم جهت است و طولی

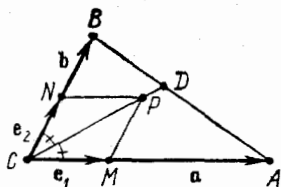
برابر واحد دارد. هر بردار به طول واحد را، بردار یکه گویند، بردار

$\frac{-\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ با بردار $\mathbf{a}$ در دو جهت مختلف اند و طولی برابر واحد دارد.

مثال ۱۰۰.۳.۲. $[CD]$ را نیمساز داخلی زاویه رأس C از مثلث ABC می‌گیریم. بردار $\vec{CD}$ را بر حسب بردارهای $\vec{a} = \vec{CA}$ و $\vec{b} = \vec{CB}$ و طول‌های آن‌ها بنویسید.

حل. از نقطه C ، بردارهای یکه

$$\vec{CM} = \vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{و} \quad \vec{CN} = \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$



را جدا می‌کنیم (نقطه‌های M و N ، به ترتیب، بر نیم خط‌های راست $[CA]$ و $[CB]$ و به فاصله واحد از نقطه C قرار دارند). متوازی الاضلاع $CNPM$ روی پاره خط‌های راست جهت دار $\vec{CM}$ و $\vec{CN}$ رسم شده است (شکل ۱۴۰۲). چون

$$|\vec{CM}| = |\vec{CN}| = 1$$

این متوازی الاضلاع، یک لوزی است و، بنابراین، قطرهای آن، نیمسازهای زاویه‌های داخلی لوزی هستند: $[CP]$

نیمساز زاویه رأس C است. بردارهای $\vec{CD}$ و $\vec{CP} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ هم راستا هستند و $\vec{CP} \neq \vec{0}$. بنابراین، عدد x وجود دارد، به نحوی که برای آن داشته باشیم:

$$\vec{CD} = x\vec{CP} = x \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + x \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

از طرف دیگر، نقطه D ، پاره خط راست $[AB]$ را، به نسبت

$$\lambda = |AD| : |DB|$$

(که فعلاً برای ما معلوم نیست) تقسیم می‌کند. در نتیجه، بنا بر رابطه (۲.۶):

$$\vec{CD} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{\lambda + 1}$$

دو عبارتی را که برای $\vec{CD}$ به دست آوردیم، با هم مقایسه می‌کنیم، با توجه به این که دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نیستند، به دست می‌آید:

$$\frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\lambda + 1}, \quad \frac{x}{|\mathbf{b}|} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

و بنا بر این $\lambda = |\mathbf{a}| : |\mathbf{b}|$ و

$$\vec{CD} = \frac{\mathbf{a} + \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}}{\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} + 1} = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}||\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|}$$

توجه کنیم که، برای $\lambda = |\mathbf{a}| : |\mathbf{b}|$ به این معناست که، نیم‌ساز داخلی زاویه C از مثلث ABC ، ضلع مقابل $[AB]$ را به نسبت

$$|AD| : |DB| = |CA| : |CB|$$

تقسیم می‌کند: نیم‌ساز داخلی هر زاویه مثلث، ضلع روبه‌رو را نسبت به دو ضلع دیگر، تقسیم می‌کند.

مثال ۱۱۰۳.۲. نقطه‌های M ، N و P را، روی خط‌های راست

(AB) ، (BC) و (CA) ، از مثلث ABC ، طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$\vec{AM} = \alpha \vec{AB}, \quad \vec{BN} = \beta \vec{BC}, \quad \vec{CP} = \gamma \vec{CA}$$

(α, β, γ) ، عددهای حقیقی‌اند. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این که بردارهای $\vec{CM}$ ، $\vec{AN}$ و $\vec{BP}$ يك مثلث بسازند، یعنی داشته باشیم:

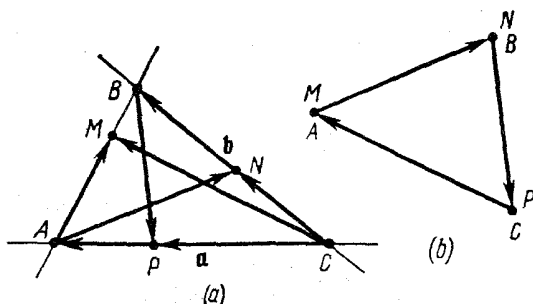
$$\vec{CM} + \vec{AN} + \vec{BP} = \mathbf{0}$$

حل. $\vec{a} = \vec{CA}$ و $\mathbf{b} = \vec{CB}$ می‌گیریم (شکل ۱۵۰۲)؛ پس $\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ ؛

$\vec{AM} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ، $\vec{CN} = (1 - \beta)\mathbf{b}$ ، $\vec{CP} = \gamma\mathbf{a}$. از این‌جا

$$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM} = (1 - \alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b},$$

$$\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{CN} = -\mathbf{a} + (1 - \beta)\mathbf{b},$$



شکل ۱۵.۲

$$\vec{BP} = \vec{BC} + \vec{CP} = -\mathbf{b} + \gamma\mathbf{a}$$

و بنا براین

$$\vec{CM} + \vec{AN} + \vec{BP} = (\gamma - \alpha)\mathbf{a} + (\alpha - \beta)\mathbf{b}$$

بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نیستند، یعنی تنها به شرطی داریم:

$$\vec{CM} + \vec{AN} + \vec{BP} = \mathbf{0}$$

که داشته باشیم: $\gamma - \alpha = 0$ و $\alpha - \beta = 0$ ، یعنی $\alpha = \beta = \gamma$.مثال ۱۴.۳.۲. پای نیمسازهای داخلی $[CM]$ ، $[AN]$ و $[BP]$ رادر مثلث ABC ، به ترتیب، M ، N و P می گیریم. می دانیم:

$$\vec{CM} + \vec{AN} + \vec{BP} = \mathbf{0}$$

ثابت کنید، مثلث ABC متساوی الاضلاع است.حل. فرض می کنیم: $\vec{AM} = \alpha\vec{AB}$ ، $\vec{BN} = \beta\vec{BC}$ و $\vec{CP} = \gamma\vec{CA}$.

بنابر آنچه در مثال ۱۵.۳.۲ ثابت کردیم، داریم:

$$\alpha = \frac{|AC|}{|AC| + |BC|}, \quad \beta = \frac{|AB|}{|AB| + |AC|}, \quad \gamma = \frac{|BC|}{|BC| + |AB|}$$

در مثال ۱۱.۳.۲ دیدیم، برابری $\vec{CM} + \vec{AN} + \vec{BP} = \vec{0}$ وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\alpha = \beta = \gamma$ ، یعنی

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\gamma} - 1$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |BC|, \quad |AC|^2 = |AB| \cdot |BC|$$

از تقسیم این دو برابری بر یکدیگر، به برابری $|AC|^3 = |AB|^3$ ، یعنی $|AC| = |AB|$ می‌رسیم و، در نتیجه، $|AC|^2 = |AC| \cdot |BC|$ یا $|AC| = |BC|$.

مثال ۱۳.۳.۲. نقطه‌های E و F را بر ضلع‌های $[BC]$ و $[CD]$ از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|BF| : |FC| = \mu, \quad |DE| : |EC| = \lambda$$

(μ و λ)، عددهای مثبت مفروض‌اند). خط‌های راست (AE) و (FD)

یکدیگر را در نقطه O قطع کرده‌اند (شکل ۲.۲ را ببینید). نسبت $\frac{|FO|}{|OD|}$ را پیدا کنید.

حل. $\vec{a} = \vec{AD} = \vec{BC}$ و $\vec{b} = \vec{AB} = \vec{DC}$ می‌گیریم؛ به دست می‌آید:

$$\vec{a} = \vec{BC} = \vec{BF} + \vec{FC} = \vec{BF} + \frac{1}{\mu} \vec{BF} = \frac{\mu+1}{\mu} \vec{BF}$$

یعنی، $\vec{BF} = \frac{\mu}{\mu+1} \vec{a}$ و به همین ترتیب $\vec{DE} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{b}$. در نتیجه

$$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{b},$$

$$\vec{FD} = -\vec{BF} - \vec{AB} + \vec{AD} = -\frac{\mu}{\mu+1} \vec{a} - \vec{b} + \vec{a} = \frac{\vec{a}}{\mu+1} - \vec{b}$$

دور $AODA$ را در نظر می‌گیریم. بنا به قانون دور

$$\vec{AO} + \vec{OD} + \vec{DA} = \vec{0} \quad (2.7)$$

بردارهای $\vec{AO}$ و $\vec{OD}$ مجهول‌اند، ولی به ترتیب، با بردارهای $\vec{AE}$ و $\vec{FD}$ هم‌راستا هستند. بنابراین، عددهای x و y وجود دارند، به نحوی که

$$\vec{AO} = x\vec{AE} = xa + \frac{\lambda}{\lambda+1}xb, \quad \vec{OD} = y\vec{FD} = \frac{1}{\mu+1}ya - yb$$

عبارت‌های مربوط به $\vec{AO}$ و $\vec{OD}$ را در رابطه (۲.۷) قرار می‌دهیم:

$$\left(xa + \frac{\lambda xb}{\lambda+1}\right) + \left(\frac{ya}{\mu+1} - yb\right) - a = \vec{0} \iff$$

$$\iff \left(x + \frac{y}{\mu+1} - 1\right)a + \left(\frac{\lambda x}{\lambda+1} - y\right)b = \vec{0}$$

چون بردارهای a و b هم‌راستا نیستند، به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$x + \frac{y}{\mu+1} = 1, \quad \frac{\lambda x}{\lambda+1} = y$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$x = \frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda + (1+\lambda)(1+\mu)}, \quad y = \frac{\lambda(1+\mu)}{\lambda + (1+\lambda)(1+\mu)}$$

به این ترتیب، برای نسبت مطلوب داریم:

$$\frac{|FO|}{|OD|} = \frac{|FD| - |OD|}{|OD|} = \frac{|FD|}{|OD|} - 1 = \frac{1-y}{y} = \frac{1+\lambda+\mu}{\lambda(1+\mu)}$$

یادداشت. در این مثال، همچنین می‌توان به دست آورد:

$$\frac{|AO|}{|OE|} = \frac{x}{1-x} = \frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda}$$

بخش ۴.۲. ماتریس‌ها. دترمینان‌ها.

دستگاه معادله‌های خطی

آرایش مستطیلی $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ را يك ماتریس مرتبه دوم (ماتریس 2×2) گویند. α_1 و α_2 عنصرهای سطر اول و β_1 و β_2 عنصرهای سطر دوم را تشکیل می‌دهند. به همین ترتیب، α_1 و β_1 ستون اول و α_2 و β_2 ستون دوم ماتریس اند. آرایش مستطیلی

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

يك ماتریس مرتبه سوم است: α_1 و α_2 و α_3 سطر اول، α_1 ، β_1 و γ_1 ستون اول ماتریس را تشکیل می‌دهند و غیره.

در این جا، تنها به ماتریس‌هایی می‌پردازیم که مربعی هستند (یعنی، تعداد سطرها و ستون‌های آن یکی است) و، در ضمن، عنصرهای آن، عددهایی حقیقی اند. برای چنین ماتریس‌هایی، می‌توان دترمینان را تعریف کرد. دترمینان

ماتریس $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ ، بنا به تعریف، برابر است با $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ و به یکی از صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$\det A, \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ یا } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

که آن را دترمینان مرتبه دوم گویند. مثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2; \quad \begin{vmatrix} a & -2 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - (-2)b = \\ = a + 2b$$

دترمینان مرتبه سوم B [(۲.۸) را ببینید]، با عبارت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) - \alpha_2 (\beta_1 \gamma_3 - \gamma_1 \beta_3) + \alpha_3 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)$$

و با یکی از صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\det B, \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

و آن را، معمولاً، دترمینان مرتبه سوم گویند. مثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-1)(-2) - (-3) \cdot 4] + [2 \cdot (-2) - (-3) \cdot (-3)] +$$

$$+ [2 \cdot 4 - (-1)(-3)] = 2 + 12 - 4 - 9 + 8 - 3 = 6;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & b & c \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} b & c \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} a & c \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4b - c) - (4a + 3c) - (a + 3b) = -5a + 5b - 5c$$

اگر همه عناصرهای یک سطر (یا یک ستون) در یک ماتریس (یا دترمینان)، در عددی مثل λ ضرب شده باشند، گوییم، این سطر (یا ستون) ماتریس (یا دترمینان)، مضربی از λ است. عملی که جای سطرها و ستونهای یک ماتریس را باهم عوض کند، ترانژاده ماتریس نام دارد. ترانژاده ماتریس

B را، با B^T نشان می‌دهند. مثلاً، اگر B را با دستور (۲.۸) مشخص کرده باشیم، آن‌گاه

$$B^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

دو ماتریس $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ و $A' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix}$ را، که از مرتبه دوم و، در ضمن، ماتریس‌های عددی‌اند (یعنی هر عنصر آن‌ها یک عدد است) در نظر می‌گیریم. در این صورت، حاصل ضرب این دو ماتریس، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AA' = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\beta'_1 & \alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\beta'_2 \\ \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\beta'_1 & \beta_1\alpha'_2 + \beta_2\beta'_2 \end{pmatrix}$$

و حاصل ضرب BB' ، از ماتریس‌های عددی و مرتبه سوم

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{pmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$BB' = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\beta'_1 + \alpha_3\gamma'_1 & \alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\beta'_2 + \alpha_3\gamma'_2 & \alpha_1\alpha'_3 + \alpha_2\beta'_3 + \alpha_3\gamma'_3 \\ \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\beta'_1 + \beta_3\gamma'_1 & \beta_1\alpha'_2 + \beta_2\beta'_2 + \beta_3\gamma'_2 & \beta_1\alpha'_3 + \beta_2\beta'_3 + \beta_3\gamma'_3 \\ \gamma_1\alpha'_1 + \gamma_2\beta'_1 + \gamma_3\gamma'_1 & \gamma_1\alpha'_2 + \gamma_2\beta'_2 + \gamma_3\gamma'_2 & \gamma_1\alpha'_3 + \gamma_2\beta'_3 + \gamma_3\gamma'_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

به عنوان مثال، اگر $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، آن گاه

$$AA' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ 2 \times 1 + 1 \times 1 & 2 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A'A = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 2 & 1 \times 1 + 0 \times 1 \\ 1 \times 0 + 1 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ماتریس واحد (یا ماتریس یکه) E به ماتریسی عددی گفته می شود که همه عناصرهای قطر اصلی آن (قطری که از سمت چپ بالا، به طرف سمت راست پایین امتداد دارد) برابر واحد و همه بقیه عناصرهای آن برابر صفر باشند. ماتریس یکه مرتبه دوم به صورت $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و ماتریس یکه مرتبه سوم،

به صورت $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ است. اگر S و E ، ماتریس های هم مرتبه و E ،

ماتریس یکه باشد، آن وقت $SE = ES = S$ و (یعنی، ماتریس یکه، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس هاست). دو ماتریس مربعی هم مرتبه X و Y را معکوس یکدیگر گویند، و با نماد $Y = X^{-1}$ و $X = Y^{-1}$ نشان می دهند، وقتی که داشته باشیم: $XY = YX = E$.

ویژگی های دترمینان ها

$$1^\circ. \det S = \det S^T$$

$$\square \text{ اگر } S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ آن وقت}$$

$$\det S = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1; S^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$\det S^T = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 = \det S$$

$$S^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ و } S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ اگر آن وقت}$$

$$\begin{aligned} \det S &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 = \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \det S^T \blacksquare \end{aligned}$$

۲°. اگر جای دو سطر يك درمیان را عوض کنیم، قدرمطلق آن تغییر نمی‌کند، ولی علامت آن عوض می‌شود.

$$\square \text{ اگر } S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ و } S' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ آن وقت}$$

$$\begin{aligned} \det S &= \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, \quad \det S' = \beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1 = \\ &= -(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) = -\det S \end{aligned}$$

$$\text{و اگر } S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ و } S' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ آن وقت}$$

$$\begin{aligned} \det S' &= \beta_1(\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2) - \beta_2(\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1) + \\ &+ \beta_3(\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) = -\alpha_1(\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \alpha_2(\beta_1 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_1) - \\ &- \alpha_3(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) = -\det S \end{aligned}$$

به همین ترتیب، می‌توان تحقیق کرد:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \blacksquare$$

۳°. اگر عنصرهای متناظر دو سطر، باهم برابر باشند، مقدار دترمینان برابر صفر است (بردار صفر).

□ در واقع، اگر جای دو سطر برابر را باهم عوض کنیم، بنا بر ویژگی ۲°، مقدار آن، به قرینه خودش تبدیل می‌شود. ولی تنها عددی (یا برداری) که با قرینه خودش برابر است، عدد صفر (یا بردار صفر) است. ■

۴°. اگر جای دو ستون دترمینان را باهم عوض کنیم، به قرینه خودش تبدیل می‌شود. مقدار دترمینانی که دو ستون برابر داشته باشد، برابر صفر (بردار صفر) است.

□ این ویژگی، نتیجه‌ای از ویژگی‌های ۱° تا ۳° است. ■

۵°. اگر عنصرهای یک سطر یا یک ستون دترمینان، به صورت مجموع چند جمله باشد، دترمینان را می‌توان به صورت مجموع چند دترمینان نوشت؛ یعنی، برای عددهای λ و μ دلخواه داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\alpha'_1 & \lambda\alpha_2 + \mu\alpha'_2 & \lambda\alpha_3 + \mu\alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

به شرطی که هر سه دترمینان معنی داشته باشند، یعنی وقتی که α_1 و α'_1 و α_2 و α'_2 به طور هم‌زمان، عددهایی حقیقی یا بردار باشند.

□ دترمینان سمت چپ برابری را، به ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha'_1) \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\lambda\alpha_2 + \mu\alpha'_2) \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (\lambda\alpha_3 + \mu\alpha'_3) \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \left(\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right) + \\
 &+ \mu \left(\alpha'_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha'_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha'_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right) = \\
 &= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \blacksquare
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب، برای دترمینان مرتبهٔ دوم، داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\alpha'_1 & \lambda\alpha_2 + \mu\alpha'_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

ویژگی ۵° را، ویژگی خطی دترمینان متناظر با سطر اول می‌نامند. با توجه به ویژگی ۲° می‌توان خطی بودن دترمینان را، نسبت به هر يك از سطرها، تحقیق کرد. از ویژگی ۵°، به ازای $\mu = 0$ نتیجه می‌شود که، اگر همهٔ عنصرهای يك سطر را در عددی ضرب کنیم، مثل این است که دترمینان را در آن عدد ضرب کرده‌ایم:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda\beta_1 & \lambda\beta_2 & \lambda\beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \\
 = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \lambda\gamma_1 & \lambda\gamma_2 & \lambda\gamma_3 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

۶°. برای هر ماتریس عددی $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ و عددهای دلخواه

λ و μ ، برابری‌های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 + \mu\gamma_1 & \alpha_2 + \lambda\beta_2 + \mu\gamma_2 & \alpha_3 + \lambda\beta_3 + \mu\gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 + \lambda\alpha_1 + \mu\gamma_1 & \beta_2 + \lambda\alpha_2 + \mu\gamma_2 & \beta_3 + \lambda\alpha_3 + \mu\gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 & \gamma_2 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 & \gamma_3 + \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 \end{vmatrix} \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

□ نخستین دترمینان بالا، بنا بر ویژگی ۵، برابر است با مجموع

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

که در آن، دترمینان‌های دوم و سوم برابر صفرند (بنا بر ویژگی ۲). دترمینان‌های اول و سوم و چهارم را، در (۲.۱۰) می‌توان، از دترمینان S ، با اضافه کردن مضربی از يك یا چند سطر به سطرهاى دیگر به دست آورد. به طور کلی، اگر در يك دترمینان، مضربی از يك یا چند سطر (یا ستون) را به يك سطر (یا ستون) اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. ■

برابری‌های مشابه (۲.۱۰)، برای دترمینان‌های عددی مرتبه دوم، چنین

است:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 & \alpha_2 + \lambda\beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 + \lambda\alpha_1 & \beta_2 + \lambda\alpha_2 \end{vmatrix}$$

۷°. اگر يك ستون دترمینان را در عددی ضرب کنیم، مقدار دترمینان در آن عدد ضرب می‌شود. اگر ترکیبی خطی از ستون‌های دیگر را، به يك ستون اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

□ با توجه به ویژگی ۱°، این ویژگی را می‌توان از ویژگی‌های ۵° و ۶° نتیجه گرفت. ■

۸°. اگر S و S' دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن وقت

$$\det(SS') = \det S \det S'$$

□ اگر $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ و $S' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix}$ ماتریس‌هایی از مرتبه دوم باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \det(SS') &= (\alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\beta'_1)(\beta_1\alpha'_2 + \beta_2\beta'_2) - \\ &- (\alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\beta'_2)(\beta_1\alpha'_1 + \beta_2\beta'_1) = \alpha_1(\alpha'_1\beta_1\alpha'_2 + \alpha'_1\beta_2\beta'_2 - \\ &- \alpha'_2\beta_1\alpha'_1 - \alpha'_2\beta_2\beta'_1) - \alpha_2(\beta'_1\beta_1\alpha'_1 + \beta'_1\beta_2\beta'_1 - \beta'_1\beta_1\alpha'_2 - \\ &- \beta'_1\beta_2\beta'_2) = \alpha_1\beta_2(\alpha'_1\beta'_2 - \alpha'_2\beta'_1) - \alpha_2\beta_1(\alpha'_1\beta'_2 - \alpha'_2\beta'_1) = \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha'_1\beta'_2 - \alpha'_2\beta'_1) = \det S \det S' \end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{pmatrix}$$

S و S' را، ماتریس‌های عددی مرتبه سوم گرفته‌ایم. بنا به دستور (۲.۹) و با توجه به ویژگی ۵°، داریم: $\det(SS') = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$ ، که در آن

$$a = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \beta_1 \alpha'_1 + \beta_2 \beta'_1 + \beta_3 \gamma'_1 & \beta_1 \alpha'_2 + \beta_2 \beta'_2 + \beta_3 \gamma'_2 \\ \gamma_1 \alpha'_1 + \gamma_2 \beta'_1 + \gamma_3 \gamma'_1 & \gamma_1 \alpha'_2 + \gamma_2 \beta'_2 + \gamma_3 \gamma'_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha'_3 \\ \beta_1 \alpha'_3 + \beta_2 \beta'_3 + \beta_3 \gamma'_3 \\ \gamma_1 \alpha'_3 + \gamma_2 \beta'_3 + \gamma_3 \gamma'_3 \end{vmatrix}$$

دترمینان‌های b و c ، به ترتیب، با قرار دادن $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ و $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ به جای سطر اول دترمینان a ، به دست می‌آیند. اگر در دترمینان a ، سطر اول را در $-\beta_1$ (و یا $-\gamma_1$) ضرب و نتیجه را بسا سطر دوم (یا با سطر سوم) جمع کنیم، بنا به تعریف دترمینان مرتبه سوم و با توجه به آنچه قبلاً در 8° ، برای دترمینان‌های مرتبه دوم ثابت کردیم، داریم:

$$\begin{aligned} a &= \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta_1 \alpha'_1 + \beta_2 \beta'_1 + \beta_3 \gamma'_1 & \beta_1 \alpha'_2 + \beta_2 \beta'_2 + \beta_3 \gamma'_2 & \beta_1 \alpha'_3 + \beta_2 \beta'_3 + \beta_3 \gamma'_3 \\ \gamma_1 \alpha'_1 + \gamma_2 \beta'_1 + \gamma_3 \gamma'_1 & \gamma_1 \alpha'_2 + \gamma_2 \beta'_2 + \gamma_3 \gamma'_2 & \gamma_1 \alpha'_3 + \gamma_2 \beta'_3 + \gamma_3 \gamma'_3 \end{vmatrix} \\ &= \alpha'_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix} - \alpha'_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix} + \\ &\quad + \alpha'_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \det S' \end{aligned}$$

به همین ترتیب $b = - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \det S'$ و $c = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \det S'$ در

نتیجه

$$\begin{aligned} \det(SS') &= \left(\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right) \det S' = \\ &= \det S \det S' \end{aligned}$$

ویژگی 8° ، برای دترمینان‌های مرتبه سوم هم ثابت شد. ■
 مثال ۰۱۰۴۰۲ با استفاده از ویژگی 6° ، مقدار این دترمینان را پیدا کنید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

حل. اگر دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

اکنون سه برابر سطر اول را از سطر سوم کم می‌کنیم، به ترتیب داریم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} -$$

$$-4 \times \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -3$$

اگر در محاسبه اخیر، از ویژگی 1° استفاده می‌کردیم، کار ساده‌تر

می‌شد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -11 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = -3$$

مثال ۰۲۰۴۰۲ ثابت کنید، اگر همه سطرها (یا ستون‌های) دترمینانی

برابر صفر (یا بردار صفر) باشند، مقدار دترمینان برابر صفر (یا بردار صفر) است.

حل. مطلب روشن است: اگر سطر (یا ستون) صفر دترمینان را در صفر ضرب کنیم، از يك طرف مقدار دترمینان تغییر نمی کند و، از طرف دیگر، مقدار دترمینان برابر صفر می شود (بنا بر ویژگی 5° و 7°).

اگر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ عددهایی حقیقی باشند، آن گاه اتحاد زیر را، برای سه دترمینان خواهیم داشت:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 \quad (2.11)$$

□ سمت راست برابری (۲.۱۱) چنین است:

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 =$$

$$= \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 -$$

$$- 2(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2 + \alpha_1\beta_3\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1)$$

و مقدار سمت چپ برابری (۲.۱۱):

$$\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 +$$

$$+ \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_3^2 - (\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 +$$

$$+ 2\alpha_1\beta_1\alpha_3\beta_3 + 2\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3) = \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 +$$

$$+ \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 -$$

$$- 2(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2 + \alpha_1\beta_3\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1)$$

■ دو طرف برابری (۲.۱۱) به يك نتیجه رسید.

پیش قضیه زیر را برای سه دترمینان ثابت می کنیم. برابری های

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

وقتی و تنها وقتی برقرارند که، دو عدد λ و μ ، که با هم برابر صفر نیستند،

بتوان پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 = 0, \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 = 0, \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 = 0 \quad (2.13)$$

در این جا، اگر $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$ ، آن وقت $\mu \neq 0$ ، و اگر $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 > 0$ ، آن وقت $\lambda \neq 0$.

□ فرض کنید، رابطه‌های (2.13) برقرار باشند و، درضمن $\lambda \neq 0$.

در این صورت

$$\alpha_1 = -\nu\beta_1, \alpha_2 = -\nu\beta_2, \alpha_3 = -\nu\beta_3$$

که در آن $\nu = \frac{\mu}{\lambda}$ ؛ بنابراین

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = -\nu\beta_2\beta_3 + \nu\beta_3\beta_2 = 0$$

و به همین ترتیب، تحقیق می‌شود:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

برعکس، اگر برابری‌های (2.12) برقرار باشند، آن وقت،

بنابرا اتحاد (2.11) داریم: $AB - C^2 = 0$ ، که در آن

$$A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad B = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2,$$

$$C = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

حالت زیر ممکن است:

(a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ، که در این صورت، رابطه‌های (2.13)،

برای $\lambda = 1$ و $\mu = 0$ برقرارند.

(b) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$. این سه جمله‌ای درجه دوم را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} p(t) &= (t\alpha_1 - \beta_1)^2 + (t\alpha_2 - \beta_2)^2 + (t\alpha_3 - \beta_3)^2 = \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)t^2 - 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)t + \end{aligned}$$

$$+(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) = At^2 - 2Ct + B = \\ = A\left(t - \frac{C}{A}\right)^2 + B - \frac{C^2}{A} = A\left(t - \frac{C}{A}\right)^2$$

سه جمله‌ای $p(t)$ ، به ازای $t = \frac{C}{A}$ برابر صفر می‌شود، یعنی رابطه‌های

$$\blacksquare \quad \mu = -1 \text{ و } \lambda = \frac{C}{A} \quad (۲.۱۳)$$

ویژگی‌های هم‌عامل‌ها (یا هم‌سازها)

زیر دترمینان يك عنصر، به دترمینانی گفته می‌شود که از حذف سطر و ستونی به دست آمده باشد که، این عنصر، در آن‌ها قرار گرفته است. اگر زیر دترمینان يك عنصر را در نظر بگیریم و، سپس، (-1) را به توان مجموع شماره‌های سطر و ستون این عنصر برسانیم و نتیجه را در زیر دترمینان ضرب کنیم، دترمینان حاصل را، زیر دترمینان علامت دار یا هم‌عامل آن عنصر گویند.

مثلاً، در دترمینان $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ ، هم‌عامل عنصر β_3 عبارت است از:

$$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

زیرا β_3 در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد. فرض کنید:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (۲.۱۴)$$

يك ماتریس دلخواه عددی، و $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ ، به ترتیب، هم‌سازهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ در دترمینان $\det S$ باشند. ماتریس

$$S' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

را در نظر می‌گیریم که از ماتریس S ، به طریق زیر به دست آمده است: به جای هر عنصر ماتریس S ، هم سازه همان عنصر را قرار می‌دهیم. سپس آن را پرمی‌گردانیم (یعنی توانهاده آن را پیدا می‌کنیم: تعویض جای سطرها و ستون‌ها با یکدیگر). ثابت می‌کنیم:

$$SS' = S'S = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \quad (\Delta = \det S)$$

با توجه به تعریف حاصل ضرب دو ماتریس، لازم و کافی است، درستی برابری‌های زیر را ثابت کنیم.

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \Delta, \quad \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = 0, \quad \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 = 0; \quad (2.16)$$

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = 0, \quad \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 = \Delta, \quad \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 = 0; \quad (2.17)$$

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = 0, \quad \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 = 0, \quad \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3 = \Delta; \quad (2.18)$$

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 = \Delta, \quad \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 = 0, \quad \alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 = 0; \quad (2.19)$$

$$\alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 = 0, \quad \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2 = \Delta, \quad \alpha_3 A_2 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 C_2 = 0; \quad (2.20)$$

$$\alpha_1 A_3 + \beta_1 B_3 + \gamma_1 C_3 = 0, \quad \alpha_2 A_3 + \beta_2 B_3 + \gamma_2 C_3 = 0,$$

$$\alpha_r A_r + \beta_r B_r + \gamma_r C_r = \Delta \quad (2.21)$$

□ همهٔ برابری‌های (۲.۱۶) تا (۲.۲۱) شبیه هم ثابت می‌شوند.

برای نمونه، دو برابری اول (۲.۱۶) را ثابت می‌کنیم:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_r A_r = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_r \\ \gamma_2 & \gamma_r \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_r \\ \gamma_1 & \gamma_r \end{vmatrix} +$$

$$+ \alpha_r \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_r \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_r A_r = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_r \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_r \end{vmatrix} = 0$$

درستی بقیهٔ برابری‌ها هم، به همین ترتیب، ثابت می‌شود. ■

از گزارهٔ بالا، می‌توان نتیجه گرفت که، برای هر ماتریس عددی S

(به صورت (۲.۱۴))، به شرطی که $\det S = \Delta$ مخالف صفر باشد، ماتریس

معکوس S^{-1} وجود دارد و

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{\Delta} & \frac{B_1}{\Delta} & \frac{C_1}{\Delta} \\ \frac{A_2}{\Delta} & \frac{B_2}{\Delta} & \frac{C_2}{\Delta} \\ \frac{A_r}{\Delta} & \frac{B_r}{\Delta} & \frac{C_r}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \det S^{-1} = \frac{1}{\Delta}$$

در حالتی که با ماتریس مرتبهٔ دوم $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ سروکار داشته باشیم و،

درضمن، شرط $\Delta = \det S = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ برقرار باشد، S^{-1}

معکوس ماتریس S ، چنین است:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\Delta} & -\frac{\alpha_2}{\Delta} \\ -\frac{\beta_1}{\Delta} & \frac{\alpha_1}{\Delta} \end{pmatrix}, \det S^{-1} = \frac{1}{\Delta}$$

دستگاه معادله‌های خطی

دستگاه معادله‌های خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = m, \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = n$$

$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = p \quad (2.22)$$

که در آن، $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ عدد، و m, n, p عدد یا بردارند. x, y, z متغیرند (عددند وقتی که m, n, p عدد باشند، و بردارند وقتی که m, n, p بردار باشند). ماتریس

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

را، ماتریس ضریب‌های دستگاه (2.22) گویند. S' را ماتریسی می‌گیریم که از هم‌سازده‌های عنصرهای ماتریس S به دست آمده باشد [(2.14) و (2.15) را ببینید]. فرض می‌کنیم: $\Delta = \det S$.

(2.22) را جواب دستگاه (2.22) فرض می‌کنیم. سپس، معادله اول دستگاه را در A_1 ، معادله دوم دستگاه را در B_1 ، معادله سوم دستگاه را در C_1 ضرب و، نتیجه‌های حاصل را باهم جمع می‌کنیم، با توجه به (2.19) به دست می‌آید:

$$x\Delta = mA_1 + nB_1 + pC_1 = \begin{vmatrix} m & \alpha_2 & \alpha_3 \\ n & \beta_2 & \beta_3 \\ p & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta_x \quad (2.23)$$

اکنون، اگر معادله‌های دستگاه را، به ترتیب، در A_1, B_1, C_1 ضرب

و، سپس، باهم جمع کنیم، با توجه به (۲.۲۵) به دست می‌آید:

$$y\Delta = mA_1 + nB_1 + pC_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & m & \alpha_1 \\ \beta_1 & n & \beta_1 \\ \gamma_1 & p & \gamma_1 \end{vmatrix} = \Delta_y \quad (2.24)$$

و به همین ترتیب:

$$z\Delta = mA_2 + nB_2 + pC_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & m \\ \beta_1 & \beta_2 & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & p \end{vmatrix} = \Delta_z \quad (2.25)$$

قضیه ۱.۴.۲ (دستور کرامر). اگر Δ ، دترمینان ماتریس ضریب‌های دستگاه معادله‌های (۲.۲۲) مخالف صفر باشد، دستگاه دارای جواب (x, y, z) است که از دستورهای زیر به دست می‌آید:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (2.26)$$

اثبات. منحصر به فرد بودن جواب، از این جسا نتیجه می‌شود که: هر جواب (x, y, z) برای دستگاه معادله‌های (۲.۲۲)، در برابری‌های (۲.۲۳) تا (۲.۲۵) صدق می‌کند و، بنابر این، به صورت (۲.۲۶) است. اکنون، ثابت می‌کنیم، دستورهای (۲.۲۶)، جواب دستگاه را به ما می‌دهد. مقدارهای x و y و z را، از دستورهای (۲.۲۶)، در سمت چپ معادله اول دستگاه قرار می‌دهیم، با توجه به رابطه‌های (۲.۱۶) تا (۲.۱۸)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \frac{\Delta_x}{\Delta} + \alpha_2 \cdot \frac{\Delta_y}{\Delta} + \alpha_3 \cdot \frac{\Delta_z}{\Delta} &= \frac{1}{\Delta} (\alpha_1 mA_1 + \alpha_1 nB_1 + \\ &+ \alpha_1 pC_1 + \alpha_2 mA_2 + \alpha_2 nB_2 + \alpha_2 pC_2 + \alpha_3 mA_3 + \alpha_3 nB_3 + \\ &+ \alpha_3 pC_3) = \frac{1}{\Delta} [(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)m + \\ &+ (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3)n + (\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3)p] = m \end{aligned}$$

به این ترتیب، x ، y و z ، از دستوره‌های (۲.۲۶)، در معادلهٔ اول دستگاه، صدق می‌کنند. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، این مقادارهای x ، y و z ، در معادله‌های دوم و سوم دستگاه هم صدق می‌کنند. پایان اثبات. این قضیه به معنای آن است که، اگر m ، n و p (به کمک عنصرهای ماتریس S در (۲.۱۴) و دستوره‌های (۲.۲۲)) بر حسب x ، y و z داده شده باشند، آن وقت x ، y و z هم (به کمک عنصرهای ماتریس S' در (۲.۱۵) و دستوره‌های (۲.۲۶)) بر حسب m ، n و p قابل بیان‌اند (به (۲.۲۳) تا (۲.۲۵) توجه کنید).

در حالتی که داشته باشیم: $m=n=p=0$ ، دستگاه معادله‌های (۲.۲۲) راهمگن می‌گویند. دستگاه همگن، در حالت $\Delta \neq 0$ ، دارای جواب منحصر به فرد $x=y=z=0$ است، که به آن، جواب بی‌مضمون هم می‌گویند. اگر يك دستگاه همگن، جواب دیگری مثل (z, y, x) ، با شرط $x^2+y^2+z^2 > 0$ داشته باشد، این جواب را، جواب مضمون‌دار می‌نامند. قضیه ۲.۴.۲. (دربارهٔ جواب مضمون‌دار، برای دستگاه معادله‌های همگن). دستگاه معادله‌های خطی

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0, \quad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0,$$

$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = 0 \quad (2.27)$$

تنها وقتی دارای جواب غیرصفر (جواب مضمون‌دار) است که داشته باشیم: $\Delta = 0$.

اثبات. اگر دستگاه معادله‌های (۲.۲۷)، دارای جواب غیرصفر باشد، آن وقت به ناچار $\Delta = 0$ ، زیرا در غیر این صورت، دستگاه معادله‌های (۲.۲۷)، دارای جواب منحصر به فرد بی‌مضمون خواهد بود (دستور کرامر). اکنون، برعکس، فرض می‌کنیم $\Delta = 0$. اگر $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, C_1, C_2, C_3$ ، به ترتیب، هم‌سازه‌های عنصرهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ از ماتریس S ، مربوط به ضریب‌های دستگاه معادله‌های (۲.۲۷) باشند، آن وقت بنابر برابری‌های (۲.۱۶) تا (۲.۱۸)، سه تایی‌های

$$(A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3)$$

جواب‌های دستگاه (۲.۲۷) خواهند بود. اگر دست کم یکی از این جواب‌ها، مضمون‌دار باشد، قضیه ثابت شده است.

حالت $A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$ را در نظر می‌گیریم. اگر همهٔ عنصرهای ماتریس S صفر باشند، دستگاه معادله‌های (۲.۲۷) جواب غیرصفر خواهد داشت (برای هر گروه از عددهای x, y, z برقرار است). اگر همهٔ عنصرهای ماتریس S صفر نباشند، می‌توانیم، در صورت لزوم، معادله‌های دستگاه (۲.۲۷) را جابه‌جا کنیم و، بدون این‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، فرض کنیم:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0 \quad \text{چون}$$

$$B_1 = - \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \quad B_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$B_3 = - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

بنابراین، با توجه به قضیهٔ سه دترمینان، عدد $v \neq 0$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\gamma_3 = v\alpha_3, \gamma_2 = v\alpha_2, \gamma_1 = v\alpha_1$ ، یعنی معادلهٔ سوم دستگاه، از معادلهٔ اول و با ضرب دو طرف در v به دست آمده است. در نتیجه، معادلهٔ سوم، بیان دیگری از همان معادلهٔ اول است.

به همین ترتیب، از $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت که، معادلهٔ دوم دستگاه (۲.۲۷) هم، بیان دیگری از همان معادلهٔ اول است. به این ترتیب، در حالت مورد بررسی ما، دستگاه معادله‌های (۲.۲۷) هم‌ارز با معادلهٔ اول دستگاه است (یا دقیق‌تر: هم‌ارز با یکی از معادله‌های دستگاه، که همهٔ ضریب‌های آن صفر نباشند).

اکنون، تنها این می‌ماند که روشن شود، معادلهٔ

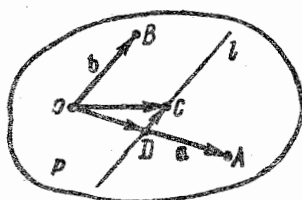
$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$$

دارای جواب غیر صفر است. و این روشن است: اگر $\alpha_1 = 0$ ، آن وقت $(0 \ 0 \ 0)$ جوابی از معادله است؛ و اگر $\alpha_1 \neq 0$ ، آن وقت جواب معادله مفروض، به صورت $(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \ -1 \ 0)$ است.

بخش ۵.۲. هم‌صفحه بودن بردارها.

پایه در صفحه و فضا.

تجزیه (بسط) بردارها



شکل ۱۶.۲

a و b را دو بردار ناهم راستا می‌گیریم. $\vec{OA} = a$ و $\vec{OB} = b$ ، هم-سنگ‌های این دو بردار را از نقطه O رسم می‌کنیم (شکل ۱۶.۲). صفحه‌ای را که از سه نقطه O ، A و B می‌گذرد، P می‌نامیم. بنا به تعریف، بردار c را با بردارهای a و b هم‌صفحه می‌گوییم، وقتی که با صفحه P موازی باشد. اگر بردار $\vec{OC} = c$ را رسم کنیم، نقطه C ، متعلق به صفحه P خواهد بود. از نقطه C ، خط

راست l را موازی با خط راست (OB) رسم می‌کنیم؛ چون بردارهای a و b هم‌راستا نیستند، خط راست l ، خط راست (OA) را در نقطه‌ای مثل D قطع می‌کند. بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OD}$ ، دو بردار هم راستا هستند و $\vec{OA} \neq 0$. با توجه به معیار هم‌راستایی بردارها، عدد حقیقی x وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\vec{OD} = x\vec{OA}$. به همین ترتیب، عدد حقیقی y وجود دارد، به نحوی که $\vec{DC} = y\vec{OB}$. بنا براین

$$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$$

$$c = xa + yb \quad (2.28)$$

هرزوج مرتب از بردارهای ناهم راستای $a \parallel P$ و $b \parallel P$ را، يك پایه در صفحه P می نامند و می نویسند: $\{a, b\}$. هر بردار c را، که با بردارهای پایه a و b هم صفحه باشد، می توان به صورت (2.28) نشان داد که، در این صورت، عددهای x و y را، مختصات بردار c در پایه $\{a, b\}$ گویند؛ درضمن، برابری (2.28) ، معرف تجزیه بردار c در رابطه با پایه $\{a, b\}$ است. این حقیقت را، که عددهای x و y ، معرف مختصات بردار c در پایه $\{a, b\}$ هستند، به این صورت می نویسند: $c = (x, y)$.

مثال ۰۱۰۵۰۲ ثابت کنید، تجزیه بردار c در پایه $\{a, b\}$ منحصر به فرد است.

حل. $c = x'a + y'b$ را تجزیه بردار c در پایه $\{a, b\}$ ، متمایز از تجزیه (2.28) فرض می کنیم. با توجه به ناهم راستایی بردارهای a و b ، باید داشته باشیم (مثال ۴۰۳۰۲ را ببینید): $x = x'$ و $y = y'$ که فرض ما را، مبنی بر متمایز بودن x و x' ، y و y' نقض می کند. تجزیه $c = xa + yb$ منحصر به فرد است.

مثال ۰۴۰۵۰۲ (معیار هم صفحه بودن). a و b و c را سه برداری از فضا می گیریم که با رابطه (2.28) به هم مربوط باشند (x و y ، عددهایی حقیقی اند). ثابت کنید، بردارهای a ، b و c هم صفحه اند.

حل. اگر بردارهای a و b هم راستا، یعنی با خط راست l موازی باشند، آن وقت، بردارهای xa و yb ، و همچنین مجموع آنها یعنی بردار c ، با خط راست l موازی می شوند. بنابراین، بردارهای a ، b و c ، با هر صفحه ای که شامل l باشد، موازی اند.

اکنون، فرض می کنیم a و b هم راستا نباشند، بردارهای $\vec{OA} = a$ و $\vec{OB} = b$ را، از نقطه O رسم می کنیم (شکل ۱۶۰۲) و صفحه (OAB) را P می نامیم. نقطه D را بر خط راست (OA) طوری در نظر می گیریم که داشته باشیم: $\vec{OD} = x\vec{OA}$ و از این نقطه، پاره خط راست جهت دار $\vec{DC} = y\vec{OB}$ را، که موازی با خط راست (OB) است، رسم می کنیم ($\vec{DC}$ ، با صفحه P

هم موازی است). ابتدای این بردار، یعنی نقطه D ، بر صفحه P قرار دارد، از این‌رو، نقطه C ، انتهای آن نیز بر صفحه P واقع است. بنابراین، ابتدا و انتهای پاره‌خط راست جهت‌دار

$$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$$

متعلق به صفحه P هستند. و این، به معنای آن است که بردار $x\vec{a} + y\vec{b}$ ، که به وسیله این پاره‌خط راست جهت‌دار نمایش داده شده است، یعنی بردار $\vec{c}$ ، با صفحه P موازی است و، در نتیجه، بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم‌صفحه‌اند.
مثال ۰۳.۵۰۲. بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم‌صفحه‌اند، ثابت کنید:

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \iff x = y = z = 0 \quad (۲.۲۹)$$

حل. اگر دست‌کم یکی از عددهای x و y و z ، و مثلاً z ، در برابری $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ ، مخالف صفر باشد، آن وقت، این برابری، با برابری

$$\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$$

هم‌ارز است که، در آن، $x' = -\frac{x}{z}$ و $y' = -\frac{y}{z}$. بنا بر معیار هم‌صفحه بودن

(مسأله قبل را ببینید)، بسايد بردار $\vec{c}$ با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌صفحه باشد که فرض‌ما را نقض می‌کند. در نتیجه $x = y = z = 0$. روشن است که برعکس، اگر داشته باشیم: $x = y = z = 0$ آن وقت $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$.

مثال ۰۴.۵۰۲. بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم‌صفحه نیستند. ثابت کنید برابری

$$m_1\vec{a} + n_1\vec{b} + k_1\vec{c} = m_2\vec{a} + n_2\vec{b} + k_2\vec{c} \quad (۲.۳۰)$$

هم‌ارز است با دستگاه برابری‌های

$$m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2, \quad k_1 = k_2 \quad (۲.۳۱)$$

حل. برای اثبات، کافی است برابری (۲.۳۰) را به صورت

$$(m_1 - m_2)\vec{a} + (n_1 - n_2)\vec{b} + (k_1 - k_2)\vec{c} = \vec{0}$$

بنویسیم و از نتیجه مسأله قبل استفاده کنیم.

مثال ۵.۵.۴. ثابت کنید، اگر بردارهای $a \neq 0$ و b هم راستا باشند، آن گاه بردارهای a ، b و c هم صفحه‌اند (ع، برداری دلخواه است).
 حل. اگر دو بردار a و c هم راستا باشند، آن وقت هر سه بردار a ، b و c با يك خط راست، و در نتیجه با صفحه دلخواهی که از این خط راست بگذرد، موازی‌اند. اگر a و c هم راستا نباشند، آن گاه در صفحه P ، يك پایه تشکیل می‌دهند و، بنابراین، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$b = ka = ka + 0 \cdot c$$

و بنابراین، بنا بر معیار هم صفحه بودن (مثال ۲.۵.۲)، بردارهای a ، b و c هم صفحه‌اند (با صفحه P موازی‌اند).

مثال ۶.۵.۴. ثابت کنید، اگر بردارهای a ، b و c هم صفحه نباشند: (ا هیچ کدام از آن‌ها، بردار صفر نیستند؛
 (ب بردارهای a و b هم راستا نیستند.
 حل. (ا اگر مثلاً داشته باشیم: $a = 0$ ، آن وقت برابری

$$1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = 0$$

يك تناقض است (۲.۲۹).

(ب) اگر بردارهای a و b هم راستا باشند و $a \neq 0$ ، آن وقت، هم صفحه نبودن بردارهای a ، b و c نقض می‌شود (نتیجه مسأله قبل)؛ و اگر $a = 0$ ، آن وقت به همان تناقضی می‌رسیم که در قسمت (ا) از همین مسأله، با آن مواجه شدیم.

مثال ۷.۵.۴. در هرم ناقص $ABCDEF$ ، $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ با قاعده‌های شش ضلعی (شکل ۷.۲)، نقطه‌های O و O_1 ، مرکزهای دو قاعده‌اند. مطلوب است:

- (ا تجزیه بردار $\overrightarrow{AD}$ در رابطه با پایه $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$ ؛
 (ب تجزیه بردار $\overrightarrow{OO_1}$ در رابطه با پایه $\{\overrightarrow{EE_1}, \overrightarrow{BB_1}\}$.

$$\vec{AD} = 2\vec{AO} = 2(\vec{AB} + \vec{AF}) = 2\vec{AB} + 2\vec{AF} \quad (a \text{ حل})$$

(b) نقطه‌های O و O_1 ، به ترتیب، وسط پاره خط‌های راست $[BE]$ و $[B_1E_1]$ هستند. بنابراین (مثال ۵.۲.۲ را ببینید):

$$2\vec{OO_1} = \vec{EE_1} + \vec{BB_1}$$

یعنی

$$\vec{OO_1} = \frac{1}{2}\vec{EE_1} + \frac{1}{2}\vec{BB_1}$$

مثال ۸.۵.۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$: $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AD}$

$\vec{c} = \vec{AC}$ و E وسط ضلع $[CD]$. بردار $\vec{BE}$ را در رابطه با پایه $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ تجزیه کنید. با سه روش مختلف، بردار $\vec{BE}$ را به صورت زیر نشان دهید:

$$\vec{BE} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \quad (۲.۳۲)$$

حل. داریم: $\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ و $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. پس

$$\vec{BE} = (\vec{c} - \vec{a}) - \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{c}$$

بردار BE ، به سادگی، با دو روش، به صورت (۲.۳۲) درمی‌آید:

$$\vec{BE} = \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a} + 1\vec{b} + 0\vec{c},$$

$$\vec{BE} = \left(-\frac{3}{2}\right)\vec{a} + 0\vec{b} + 1\vec{c}$$

اگر t ، عدد حقیقی دلخواهی باشد، آن وقت

$$t(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = 0$$

از آن جا

$$\vec{BE} = \vec{BE} + 0 = \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a} + \vec{b} + t(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) =$$

$$= \left(t - \frac{1}{\gamma}\right) \mathbf{a} + (1+t) \mathbf{b} - t \mathbf{c}$$

که به ازای $t = 0$ به همان نمایش اول $\overrightarrow{BE}$ و به ازای $t = -1$ به نمایش دوم آن می‌رسیم. به ازای $t = 1$ ، نمایش زیر برای $\overrightarrow{BE}$ به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{a} + \gamma \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ و عددهای حقیقی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ را در نظر می‌گیریم. بردار

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$$

را، يك تركيب خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ (با ضرایبهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) گویند. اگر داشته باشیم: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ ، ترکیب خطی را بی‌مضمون و در غیر این صورت، مضمون‌دار می‌گویند. بیان بردار $\mathbf{a}$ به صورت يك تركيب خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ را، تجزیه بردار $\mathbf{a}$ بر حسب بردارهای $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ می‌نامند. از حل مثال ۸.۵.۲ می‌توان نتیجه گرفت که، تجزیه يك بردار، نسبت به سه بردار هم صفحه، منحصر به فرد نیست. در مثال ۲.۵.۲، روشن شد، اگر سه بردار هم صفحه نباشند، نمی‌توان یکی از آنها را نسبت به دو بردار دیگر تجزیه کرد. بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ را مستقل خطی گویند، هرگاه

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (2.33)$$

از حل مثال‌های ۳.۳.۲ و ۳.۵.۲ می‌توان نتیجه گرفت: بردارهای هم‌داستای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مستقل خطی‌اند؛ همچنین، اگر بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه نباشند، مستقل خطی‌اند. بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ وقتی دارای بستگی خطی هستند که مستقل خطی نباشند، یعنی عددهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود داشته باشند، به نحوی که داشته باشیم:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0 \quad (2.34)$$

مثال ۹.۵.۲. ثابت کنید:

(a) دو بردار a و b بستگی خطی دارند، تنها اگر هم راستا باشند؛
 (b) سه بردار a ، b و c بستگی خطی دارند، تنها اگر هم صفحه باشند.
 حل. کافی است ثابت کنیم، بردارهای هم راستا (هم صفحه)، دارای بستگی خطی هستند.

(a) فرض کنید $a \parallel b$. اگر $a = 0$ ، آن گاه $0.a + 0.b = 0$ ، و هم راستائی بردارهای 0 و b ، متضمن وجود بستگی خطی بین آنهاست. اگر دو بردار $a \neq 0$ و b هم راستا باشند، بنا بر معیار هم راستائی بردارها، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $b = ka$ ، یعنی

$$1.b + (-k)a = 0, \quad 1^2 + (-k)^2 > 0$$

و وجود بستگی خطی بین بردارهای a و b روشن می شود.

(b) a ، b و c را بردارهایی هم صفحه می گیریم. اگر بردارهای a و b هم راستا باشند، همان طور که دیدیم، عددهای α و β وجود دارند، به نحوی که $\alpha a + \beta b = 0$ و $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ در این صورت، داریم:

$$\alpha a + \beta b + 0.c = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + 0^2 > 0$$

یعنی، بردارهای a ، b و c بستگی خطی دارند. اکنون فرض می کنیم، بردارهای a و b هم راستا نباشند (a ، b و c هم صفحه اند). در این صورت، برای مقادارهایی از x و y داریم [(۲.۲۸) را ببینید]:

$$(-1)c + xa + yb = 0, \quad (-1)^2 + x^2 + y^2 > 0$$

یعنی a ، b و c دارای بستگی خطی هستند.

يك پایه در فضا، به وسیله سه تایی مرتب از بردارهای غیر هم صفحه a ، b و c تعریف می شود. پایه ای که با سه بردار a ، b و c ساخته شده باشد، با نماد $\{a, b, c\}$ نشان داده می شود.

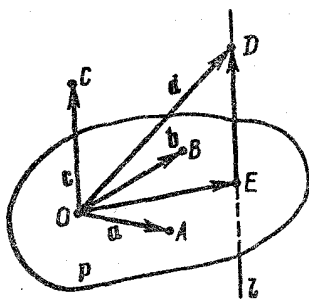
مثال ۱۰.۵.۲. (تجزیه نسبت به پایه فضائی). $\{a, b, c\}$ را يك پایه فضائی و d را برداری دلخواه می گیریم. ثابت کنید، تجزیه بردار d نسبت

به بردارهای a, b و c ، منحصر به فرد است.

حل. از نقطه O ، بردارهایی هم‌سنگ بردارهای a, b, c و d رسم

می‌کنیم:

$$\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c, \vec{OD} = d$$



شکل ۱۷.۲

a و b هم‌راستا نیستند (مثال ۶.۵.۲ را

بینید)؛ صفحه (OAB) را P می‌نامیم.

از نقطه D ، خط راست l را، موازی

(OC) (رسم می‌کنیم) (بردار $c = \vec{OC} \neq 0$ ؛

مثال ۶.۵.۲ را بینید؛ بنا براین، خط

راست l ، منحصر به فرد است). بردار

$c = \vec{OC}$ ، موازی با صفحه P نیست،

بنا براین، خط راست l در نقطه‌ای مثل E ،

از صفحه P می‌گذرد (شکل ۱۷.۲).

بردارهای $\vec{ED}$ و $\vec{OC} \neq 0$ هم‌راستا

هستند. بنا بر معیار هم‌راستائی، عدد حقیقی

z وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\vec{ED} = z\vec{OC} = zc$$

پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\vec{OE}$ ، $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ هم‌صفحه‌اند؛ $\{a, b\}$ ، یک

پایه در صفحه P و، صفحه P ، شامل این پاره‌خط‌های راست است. در نتیجه،

بردار $\vec{OE}$ نسبت به پایه $\{a, b\}$ ، به صورت $\vec{OE} = xa + yb$ تجزیه

می‌شود. سرانجام، داریم:

$$d = \vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED} = xa + yb + zc$$

منحصر به فرد بودن تجزیه بردار d نسبت به پایه $\{a, b, c\}$ ، در مثال

۴.۵.۲ ثابت شده است. در واقع، اگر $d = x'a + y'b + z'c$ فرض کنیم،

با توجه به این‌که بردارهای a, b و c هم‌صفحه نیستند، نتیجه می‌شود:

$$x = x', y = y', z = z'$$

ضرب‌های تجزیه‌ی بردار $\mathbf{d}$ نسبت به پایه‌ی $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ را، مختصات بردار $\mathbf{d}$ در پایه‌ی $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ گویند و به این صورت می‌نویسند: $\mathbf{d} = (x, y, z)$.

ویژگی‌های مختصات یک بردار $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ را یک پایه، $\mathbf{d} = (x, y, z)$ و $\mathbf{e} = (x', y', z')$ را دو بردار دلخواه و λ را عددی حقیقی می‌گیریم. در این صورت

۱° $\mathbf{d} = \mathbf{e}$ هم‌ارز است با: $x = x', y = y', z = z'$. دو بردار، تنها وقتی باهم برابرند که، مختصات آن‌ها، با هم برابر باشند.

۲° $\mathbf{d} + \mathbf{e} = (x + x', y + y', z + z')$. مختصات مجموع دو بردار، برابر است با مجموع مختصات متناظر آن‌ها.

۳° $\lambda \mathbf{d} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. اگر بردار را در عددی ضرب کنیم، مختصات بردار، در آن عدد ضرب می‌شود.

□ ویژگی ۱° را در مثال ۲.۵.۲ ثابت کردیم. ویژگی‌های ۲° و ۳°، حالت‌های خاصی از ویژگی خطی مختصات، به صورت زیرند: برای هر دو عدد حقیقی α و β داریم:

$$\alpha \mathbf{d} + \beta \mathbf{e} = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$$

در واقع داریم:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{d} + \beta \mathbf{e} &= \alpha(x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}) + \beta(x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}) = \\ &= (\alpha x + \beta x')\mathbf{a} + (\alpha y + \beta y')\mathbf{b} + (\alpha z + \beta z')\mathbf{c} = \\ &= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \end{aligned}$$

مختصات بردارها، در صفحه، ویژگی‌های مشابهی دارند. اگر $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ را پایه‌ای در صفحه‌ی P ، $\mathbf{d} = (x, y)$ و $\mathbf{e} = (x', y')$ را بردارهای دلخواهی موازی صفحه‌ی P ، و α و β را عددهایی حقیقی فرض کنیم، آن وقت

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} \iff x = x', y = y' \quad ۱^\circ$$

$$\alpha \mathbf{d} + \beta \mathbf{e} = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \quad ۲^\circ$$

مثال ۲.۵.۱۱. منشور $ABCA_1B_1C_1$ ، با قاعده‌های مثلثی مفروض

است (شکل ۶.۲). بردار $\overrightarrow{AA_1}$ را نسبت به پایه $\{\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BA_1}\}$ تجزیه کنید.

حل. داریم:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}, \quad \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}$$

از مجموع این برابری‌ها به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1}$$

چون $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$ (دور $ABCA$) و $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ بنابراین

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}$$

مثال ۱۲۰۵.۲. در چهاروجهی $ABCD$ ، نقطه‌های K و L ، به ترتیب، وسط یال‌های $[AC]$ و $[BD]$ ، و نقطه O محل برخورد میانه‌های وجه ACD است (شکل ۱۸۰۲):

(a) بردار $\overrightarrow{BO}$ را نسبت به پایه $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$ تجزیه کنید؛
 (b) بردار $\overrightarrow{KL}$ را، نسبت به هر یک از پایه‌های $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ ، $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$ و $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$ تجزیه کنید.
 حل. (a) داریم:

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD}$$

از مجموع این برابری‌ها، به دست می‌آید:

$$3\overrightarrow{BO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$$

با توجه به حل مثال ۳۰۲.۲ داریم: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \mathbf{0}$ و بنابراین

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$$

(b) $\overrightarrow{AL}$ بردار میانه مثلث ADB است، بنابراین

$$\vec{AL} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AB})$$

از آنجا

$$\begin{aligned}\vec{KL} &= \vec{AL} - \vec{AK} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AB}) - \frac{1}{2}\vec{AC} = \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\end{aligned}$$

با روش دیگری هم می‌توان این تجزیه را پیدا کرد. با توجه به دستور میانه برای چهارضلعی فضائی (مثال ۵.۲.۲ را ببینید)، داریم:

$$\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB})$$

و چون $\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$ ، بنا براین:

$$\vec{KL} = -\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

$\vec{KL}$ بردار میانهٔ مثلث KDB است. در نتیجه

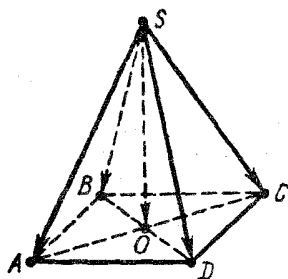
$$\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{KD} + \vec{KB})$$

از طرف دیگر، $\vec{KO} = \frac{1}{2}\vec{OD}$ و $\vec{KD} = \frac{3}{2}\vec{OD}$ ؛ در نتیجه

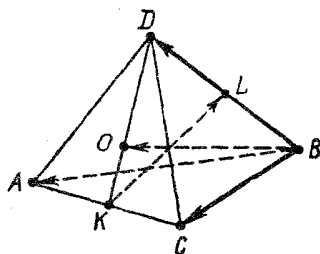
$$\begin{aligned}\vec{KL} &= \frac{1}{2}(\vec{KD} + \vec{KB}) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\vec{OD} + (\vec{KO} + \vec{OB})\right] = \\ &= \frac{1}{2}(2\vec{OD} + \vec{OB}) = -\frac{1}{2}\vec{BO} + \vec{OD} + 0 \cdot \vec{AC}\end{aligned}$$

سرانجام، همان‌طور که در بالا اشاره شد:

$$\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB}) = -\frac{1}{2}\vec{DA} - \frac{1}{2}\vec{BC} + 0 \cdot \vec{BO}$$



شکل ۱۹.۲



شکل ۱۸.۲

مثال ۱۳.۵.۲. O را مرکز قاعده $ABCD$ از چهاروجهی منتظم $SABCD$ می‌گیریم. بردار $\vec{SO}$ را، نسبت به بردارهای $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$ ، به چند روش، تجزیه کنید.
حل. داریم (شکل ۱۹.۲):

$$\vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{SC}), \quad \vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{SB} + \vec{SD})$$

که از مجموع آن‌ها، تجزیه سوم به دست می‌آید:

$$\vec{SO} = \frac{1}{4}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD})$$

مثال ۱۴.۵.۲. چند تجزیه از بردار $\vec{KL}$ را (مثال ۱۲.۵.۲ را ببینید)، نسبت به بردارهای $\vec{AB}, \vec{CB}, \vec{DB}, \vec{OB}$ پیدا کنید.

حل. چون $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{CB}$ و $\vec{AD} = \vec{AB} - \vec{DB}$ پس

$$\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{DB} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{CB}$$

داریم: $\vec{KL} = \frac{1}{4}\vec{OB} + \vec{OD}$ (مثال ۱۲.۵.۲ را ببینید)؛ و چون

علاوه بر آن داریم: $\vec{OD} = \vec{OB} - \vec{DB}$ ، به تجزیه دوم می‌رسیم:

$$\vec{KL} = \frac{3}{4}\vec{OB} - \vec{DB} + 0 \cdot \vec{CB} + 0 \cdot \vec{AB}$$

اکنون، اگر از برابری که در مثال ۱۲.۵.۲ به دست آوردیم، استفاده

کنیم:

$$-\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{AB} = 0$$

آن وقت، برای هر $t \in R$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\vec{KL} &= \frac{3}{4}\vec{OB} + t\left(-\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{AB}\right) - \vec{DB} = \\ &= \left(\frac{3}{4} - t\right)\vec{OB} + \left(\frac{1}{3}t - 1\right)\vec{DB} + \frac{1}{3}t\vec{CB} + \frac{1}{3}t\vec{AB}\end{aligned}$$

که به ازای $t = 0$ و $t = \frac{3}{4}$ ، به ترتیب، تجزیه‌های اول و دوم به دست می‌آید.

مثال ۱۵.۵.۲* نقطه K روی ضلع $[AB]$ از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ،

و نقطه L روی امتداد ضلع $[CD]$ ، از طرف D ، قرار دارند. خط‌های (KD)

و (BL) در نقطه N ، و خط‌های راست (LA) و (CK) در نقطه M یکدیگر

را قطع کرده‌اند. ثابت کنید پاره‌خط راست $[MN]$ ، با ضلع $[AD]$ موازی است.

حل. فرض می‌کنیم: $\vec{b} = \vec{AB}$ و $\vec{d} = \vec{AD}$ (شکل ۲۰.۲). بردارهای

$\vec{AK}$ و $\vec{AB} \neq 0$ هم‌راستا هستند. بنابراین، عدد $\lambda \in [0, 1]$ وجود دارد، به

نحوی که داشته باشیم: $\vec{AK} = \lambda \vec{AB} = \lambda \vec{b}$ (λ ، بستگی به جای نقطه

$K \in [AB]$ دارد). به همین ترتیب، با توجه به هم‌راستایی بردارهای $\vec{CL}$ و

$\vec{CD}$ ، عدد $\mu > 1$ وجود دارد، به نحوی که $\vec{CL} = \mu \vec{CD} = -\mu \vec{b}$ (μ ،

بستگی به جای نقطه $L \in [CD]$ دارد). نقطه N بر خط راست (KD) واقع است.

بنابراین (با توجه به مثال ۶.۳.۲)، عدد τ (که فعلاً مجهول است) وجود دارد، به نحوی که

$$\vec{AN} = (1 - \tau)\vec{AK} + \tau\vec{AD} = (\lambda - \lambda\tau)\mathbf{b} + \tau\mathbf{d}$$

نقطه N ، بر (BL) هم قرار دارد. بنابراین، عدد ξ (فعلاً مجهول) وجود دارد، به نحوی که

$$\begin{aligned}\vec{AN} &= (1 - \xi)\vec{AB} + \xi\vec{AL} = (1 - \xi)\mathbf{b} + \xi(\mathbf{b} + \mathbf{d} - \mu\mathbf{b}) = \\ &= \xi\mathbf{d} + (1 - \xi\mu)\mathbf{b}\end{aligned}$$

به این ترتیب، به دو تجزیه از بردار $\vec{AN}$ ، نسبت به پایه $\{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ رسیدیم. با توجه به منحصر بودن تجزیه یک بردار، نسبت به یک پایه، به دست می آید:

$$\lambda - \lambda\tau = 1 - \xi\mu, \quad \tau = \xi$$

و از آنجا

$$\tau = \xi = \frac{1 - \lambda}{\mu - \lambda}$$

و بنابراین

$$\vec{AN} = \frac{\lambda(\mu - 1)\mathbf{b} + (1 - \lambda)\mathbf{d}}{\mu - \lambda}$$

بردار $\vec{AM}$ هم، به همین ترتیب، به دست می آید. چون $M \in (AL)$ ، عدد t وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\vec{AM} = -t\vec{AL} = -t(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CL}) = -t[(1 - \mu)\mathbf{b} + \mathbf{d}]$$

$M \in (KC)$ ، بنابراین

$$\begin{aligned}\vec{AM} &= (1 - \theta)\vec{AK} + \theta\vec{AC} = (1 - \theta)\lambda\mathbf{b} + \theta(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \\ &= (\lambda + \theta - \lambda\theta)\mathbf{b} + \theta\mathbf{d}, \quad (\theta \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

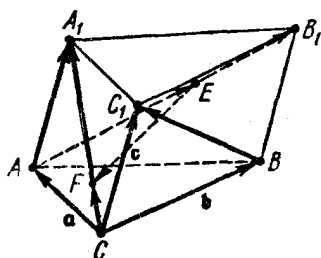
دو تجزیه ای را که برای $\vec{AM}$ ، نسبت به پایه $\{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ ، به دست آمده است، باهم مقایسه می کنیم، به دستگاه معادله های زیر می رسیم:

$$-t + t\mu = \lambda + \theta - \lambda\theta, \quad -t = \theta$$

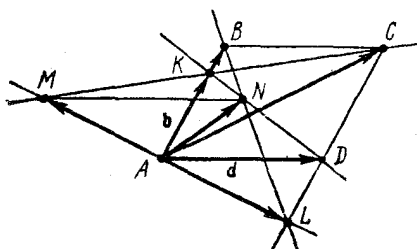
که از آن‌جا، به دست می‌آید: $t = -\theta = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ و در نتیجه

$$\vec{AM} = -\frac{\lambda(1-\mu)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{d}}{\mu - \lambda}, \quad \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{\mathbf{d}}{\mu - \lambda}$$

یعنی $\vec{MN} \parallel \mathbf{d}$ و بنا بر این $(MN) \parallel (AD)$.



شکل ۲۰.۲



شکل ۲۱.۲

مثال ۱۶.۵.۲. نقطه‌های E و F ، بر قطرهای $[AB_1]$ و $[CA_1]$ از وجه‌های جانبی منشور $ABCA_1B_1C_1$ (با قاعده‌های مثلثی) قرار دارند، به نحوی که $(EF) \parallel (BC_1)$. نسبت $|EF| : |BC_1|$ را پیدا کنید.
 حل. بردارهای $\vec{a} = \vec{CA}$ ، $\vec{b} = \vec{CB}$ و $\vec{c} = \vec{CC_1}$ هم‌صفحه نیستند. بردارها را، نسبت به پایه $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ تجزیه می‌کنیم:

$$\vec{AB_1} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BB_1} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

$$\vec{CA_1} = \vec{CA} + \vec{AA_1} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad \vec{BC_1} = \vec{BC} + \vec{CC_1} = -\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

چون بردارهای $\vec{AB_1}$ و $\vec{AE}$ هم‌راستا هستند، عددی مانند μ وجود دارد، به نحوی که

$$\overrightarrow{AE} = u\overrightarrow{AB} = \mu(-a+b+c)$$

به همین ترتیب، عدد v وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$\overrightarrow{CF} = v\overrightarrow{CA} = v(a+c)$$

بنا بر فرض $(EF) \parallel (BC)$ ؛ بنا بر این، عدد λ وجود دارد، به نحوی که

$$\overrightarrow{EF} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda(-b+c)$$

دور $CAEFC$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۱.۲). بنا بر قانون دور داریم:

$$0 = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = a + \mu(-a+b+c) + \lambda(-b+c) - v(a+c) = (1-\mu-v)a + (\mu-\lambda)b + (\mu+\lambda-v)c$$

بردارهای a ، b و c هم‌صفحه نیستند، بنا بر این $[(2.29)]$ را ببینید

$$1-\mu-v=0, \mu-\lambda=0, \mu+\lambda-v=0$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$ ، $v = \frac{2}{3}$ و در نتیجه

$$|EF| : |BC| = |\lambda| = \frac{1}{3}$$

تجزیه و تحلیل راه‌حل نشان می‌دهد که، در حل مسأله‌ها با روش برداری، رسم شکل، تنها برای درک بهتر شرط‌های مسأله لازم است؛ همچنین، شکل را می‌توان به عنوان ابزاری به حساب آورد که به تنظیم مسأله، برحسب جبر برداری، کمک می‌کند. اگر بتوان بعضی از شرط‌های مسأله را، بدون رسم شکل، از زبان هندسی به زبان تحلیلی ترجمه کرد، دیگر نیازی برای شرح هندسی این شرط‌ها نداریم. مثلاً، در شکل ۲۱.۲، خط‌های راست (EF) و (BC) غیر موازی نشان داده شده‌اند، ولی این وضع، اثری در حل مسأله ندارد، چرا که هم‌راستائی بردارهای $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BC}$ ، با روش کاملاً تحلیلی، به دست می‌آید. در این‌جا، بعد از آن‌که جواب مسأله مشخص شد، می‌توانیم شکل را هم، به‌طور دقیق رسم کنیم. ضمن حل مسأله، نه تنها مقدار

نسبت $|EF| : |BC|$ را پیدا کردیم، بلکه در ضمن، موقعیت نقطه‌های F و E را هم، روی پاره‌خط‌های راست متناظر خود به دست آوردیم:

$$|CF| = \frac{2}{3} |CA|, \quad |AE| = \frac{1}{3} |AB|$$

مثال ۱۷.۵.۲. نقطه‌های M ، N و Q ، به ترتیب، بر یال‌های $[AB]$ ، $[BC]$ و $[CD]$ از چهار وجهی $ABCD$ قرار دارند. صفحه (MNQ) ، خط راست (AD) را در نقطه P قطع می‌کند. می‌دانیم:

$$|DN| = |CN|, \quad |AM| = |BM|, \quad |CQ| : |CB| = n$$

نسبت $|DP| : |DA|$ را پیدا کنید.

حل. پایه $\{a, b, d\}$ را انتخاب می‌کنیم: $b = \overrightarrow{CB}$ ، $a = \overrightarrow{CA}$ ، $d = \overrightarrow{CD}$ (شکل ۲۲.۲)؛ و بردارها را، نسبت به این پایه، تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} d, \quad \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2} d + nb, \quad AC = -a,$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + (1-n)\overrightarrow{BC} =$$

$$= \frac{1}{2} (b-a) - (1-n)b = -\frac{1}{2} a + \left(n - \frac{1}{2}\right) b$$

چون نقطه P بر خط راست (AD) واقع است، عدد λ وجود دارد، به نحوی که

$$\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DA} = \lambda(a-d), \quad \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DP} = (1-\lambda)(a-d)$$

همچنین، نقطه P ، بر صفحه (MNQ) واقع است، بنابراین، بردارهای $\overrightarrow{NP}$ ، $\overrightarrow{NQ}$ و $\overrightarrow{MQ}$ هم صفحه‌اند. بردارهای $\overrightarrow{NQ}$ و $\overrightarrow{MQ}$ هم راست نیستند و یک پایه را در صفحه (MNQ) پدید می‌آورند. بردار $\overrightarrow{NP}$ ، نسبت به این پایه، با ضرایب مجهول μ و ν ، تجزیه می‌شود:

$$\overrightarrow{NP} = \mu \overrightarrow{NQ} + \nu \overrightarrow{MQ} = \mu \left(-\frac{1}{2} d + nb \right) +$$

$$+v\left(-\frac{1}{r}a+\left(n-\frac{1}{r}\right)b\right)=-\frac{v}{r}a+ \\ +\left(n(\mu+v)-\frac{v}{r}\right)b-\frac{\mu}{r}d$$

اکنون از قاعده دور استفاده می‌کنیم. در دور $CNPAC$ داریم:

$$0=\vec{CN}+\vec{NP}+\vec{PA}+\vec{AC}=\frac{1}{r}d-\frac{v}{r}a+ \\ +\left(n(\mu+v)-\frac{v}{r}\right)b-\frac{\mu}{r}d+(1-\lambda)a-(1-\lambda)d-a$$

بردارهای a ، b و d هم صفحه نیستند. بنابراین

$$-\frac{v}{r}+(1-\lambda)-1=0, \quad n(\mu+v)-\frac{v}{r}=0,$$

$$\frac{1}{r}-\frac{\mu}{r}-(1-\lambda)=0$$

از آنجا

$$v=-2\lambda, \quad \mu=\frac{v}{rn}-v=2\lambda-\frac{\lambda}{n},$$

$$\frac{1}{r}-\lambda+\frac{\lambda}{rn}-1+\lambda=0$$

یعنی $\lambda=n$ و، سرانجام، به دست می‌آید:

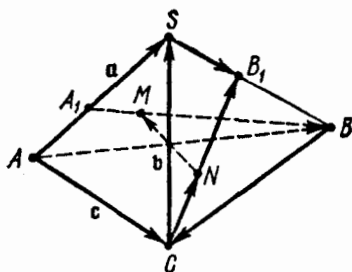
$$|DP|:|DA|=|\lambda|=n$$

مثال ۱۸.۵۰۲. نقطه‌های A_1 و B_1 ، به ترتیب، بر یال‌های $[SA]$ و

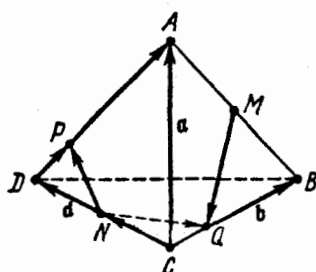
$[SB]$ از چهاروجهی $SABC$ انتخاب شده‌اند و می‌دانیم:

$$|SA_1|:|SA|=n, \quad |SB_1|:|SB|=m$$

نقطه‌های M و N ، به ترتیب، بر پاره خط‌های راست $[A_1B]$ و $[CB_1]$



شکل ۲۳.۲



شکل ۲۳.۲

واقع‌اند و درضمن داریم: $|CN|:|CB_1| = p$ و پاره خط راست $[MN]$ ، با صفحه (ASC) موازی است. نسبت $|BM|:|BA_1|$ را پیدا کنید.
 حل. بردارهای $\vec{a} = \vec{AS}$ ، $\vec{b} = \vec{AB}$ و $\vec{c} = \vec{AC}$ ، یک پایه را می‌سازند (شکل ۲۳.۲). نسبت به این پایه داریم:

$$\begin{aligned}\vec{CB_1} &= \vec{CS} + m\vec{SB} = m\vec{CB} + (1-m)\vec{CS} = m(\vec{b}-\vec{c}) + \\ &+ (1-m)(\vec{a}-\vec{c}) = (1-m)\vec{a} + m\vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

[۲.۵) را ببینید]. بنا براین

$$\vec{CN} = p\vec{CB_1} = p(1-m)\vec{a} + pmb - pc$$

بردار $\vec{NM}$ با صفحه (ASC) موازی است و، در نتیجه، نسبت به پایه $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ قابل تجزیه است: $\vec{NM} = y\vec{a} + z\vec{c}$ (عدهای مجهول y و z را باید پیدا کنیم). به جز آن

$$\vec{BA_1} = \vec{BA} + \vec{AA_1} = -\vec{b} + (1-n)\vec{a}$$

بردارهای $\vec{BA_1}$ و $\vec{MB}$ ، دو جهت مختلف دارند، بنابراین عدد

$x < 0$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\vec{MB} = x\vec{BA_1} = -x\vec{b} + x(1-n)\vec{a}$$

سرانجام $\vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. با توجه به دور $CNMBC$ داریم:

$$\mathbf{0} = \vec{CN} + \vec{NM} + \vec{MB} + \vec{BC} = p(1-m)\mathbf{a} + pm\mathbf{b} - p\mathbf{c} + \\ + y\mathbf{a} + z\mathbf{c} - x\mathbf{b} + x(1-n)\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$$

که اگر آن را مرتب کنیم، به دست می‌آید:

$$[p(1-m) + y + x(1-n)]\mathbf{a} + (pm - x - 1)\mathbf{b} + \\ + (-p + z + 1)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

به این ترتیب، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$p(1-m) + y + x(1-n) = 0, \quad pm - x - 1 = 0, \\ -p + z + 1 = 0$$

از معادلهٔ دوم این دستگاه به دست می‌آید: $x = pm - 1$ ؛ و در نتیجه

$$|BM| : |BA_1| = |x| = |pm - 1| = 1 - pm$$

مثال ۱۹.۵.۴. (شرط هم‌داستانی برای بردارها). $\{e_1, e_2, e_3\}$ را

یک پایهٔ فضایی می‌گیریم. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که بردارهای

$$\mathbf{a} = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3, \quad \mathbf{b} = b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3$$

هم راستا باشند.

حل. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ تنها وقتی هم‌راستا هستند که بستگی خطی داشته

باشند (مثال ۹.۵.۲ را ببینید)، یعنی وقتی که عددهای μ و λ (که باهم صفر نیستند) وجود داشته باشند، به نحوی که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

بنابر ویژگی خطی مختصات، این برابری با دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\lambda a_x + \mu b_x = 0, \quad \lambda a_y + \mu b_y = 0, \quad \lambda a_z + \mu b_z = 0$$

که به معنای متناسب بودن مختصات هم‌نام دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دارد. بنابر پیش

قضیه سه دترمینان (۲.۱۲) و (۲.۱۳) را ببینید، دستگاه معادله‌های بالا، تنها وقتی برقرارند که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad (۲.۳۵)$$

مثال ۲.۵.۲. (شرط هم صفحه بودن). $\{e_1, e_2, e_3\}$ را يك پایۀ فضائی فرض می‌کنیم. ثابت کنید، بردارهای

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

تنها وقتی هم صفحه‌اند که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (۲.۳۶)$$

حل. بردارهای

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2 + a_z \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_1 + b_y \mathbf{e}_2 + b_z \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{e}_1 + c_y \mathbf{e}_2 + c_z \mathbf{e}_3$$

وقتی هم صفحه‌اند که دارای بستگی خطی باشند (مثال ۲.۵.۱ را ببینید). بنابراین، عددهای x, y و z ، که با هم صفر نیستند $(x^2 + y^2 + z^2 > 0)$ وجود دارند، به نحوی که برابری

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

برقرار باشد؛ یعنی

$$(a_x x + b_x y + c_x z)\mathbf{e}_1 + (a_y x + b_y y + c_y z)\mathbf{e}_2 + (a_z x + b_z y + c_z z)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

چون $\{e_1, e_2, e_3\}$ يك پایۀ است، (x, y, z) جواب غیر صفر دستگاه زیر است:

$$a_x x + b_x y + c_x z = 0, \quad a_y x + b_y y + c_y z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad (2.37)$$

و می‌دانیم (قضیه ۲ را در همین فصل ببینید)، این دستگاه همگن، وقتی جواب غیر صفر دارد که برابری (۲.۳۶) برقرار باشد.

بخش ۶.۲. دستگاه مختصات.

مختصات نقطه در دستگاه مختصات.

دستورهای انتقال از یک دستگاه، به

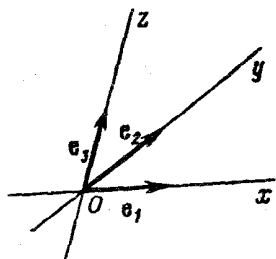
دستگاه دیگر مختصات

اگر قطب O و پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ را در فضا تثبیت کرده باشیم، گوییم: دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ در فضا مشخص شده است. نقطه O را، مبدأ مختصات، یا به طور ساده مبدأ گویند. خط‌های راستی که از مبدأ موازی بردارهای e_1, e_2, e_3 رسم شده باشند، محورهای مختصات نامیده می‌شوند که، آن‌ها را، به ترتیب، با Ox (محور x ها یا محور طول‌ها)، Oy (محور y ها یا محور عرض‌ها) و Oz (محور z ها) نشان می‌دهند. صفحه‌ای را که از محورهای x و y گذشته باشد، صفحه xy (یا صفحه مختصات Oxy) گویند. به همین ترتیب، صفحه‌های مختصات Oxz و Oyz مشخص می‌شوند (شکل ۲۴.۲). اگر M نقطه

دلخواهی از فضا باشد، آن وقت، مختصات (x, y, z) این نقطه در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ ؛ به عنوان ضریب‌های تجزیه شعاع حامل $\vec{OM}$ نقطه M ، نسبت به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ مشخص می‌شود، یعنی:

$$\vec{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

اگر مفهوم دستگاه مختصات روشن باشد، می‌توانیم به طور ساده، درباره مختصات



شکل ۲۴.۲

نقطه M صحبت کنیم. اگر (x, y, z) مختصات نقطه M باشد، آن را به صورت $M(x, y, z)$ می‌نویسند. از آن‌جا که هر بردار $\vec{OM}$ را می‌توان، نسبت به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ تجزیه کرد، بنابراین، هر نقطه M ، در دستگاه مفروض $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ دارای مختصاتی است. بنابر ویژگی 1° درباره مختصات یک بردار، نقطه M ، به وسیله مختصات خود، کاملاً مشخص می‌شود: دو نقطه $M(x, y, z)$ و $M_1(x_1, y_1, z_1)$ وقتی، و تنها وقتی، برهم منطبق اند که داشته باشیم: $x = x_1, y = y_1, z = z_1$. اگر نقطه‌های $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ به وسیله مختصات خود، در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ مشخص باشند، آن‌گاه در پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ خواهیم داشت:

$$\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1), \vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$$

همچنین، بنابر ویژگی خطی مختصات بردار

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

یعنی، مختصات بردار AB ، نسبت به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، از تفاضل مختصات هم نام نقطه انتهائی B و نقطه ابتدائی A ، در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ به دست می‌آید (O ، نقطه دلخواهی از فضا است).

مثال ۱۰۶۰۲. با توجه به شرط‌های مثال ۱۲۰۵۰۲، مطلوب است:

(a) مختصات نقطه O در دستگاه مختصات $\{B, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}\}$ ؛

(b) مختصات نقطه L در دستگاه مختصات $\{A, \vec{BO}, \vec{OD}, \vec{AC}\}$

حل. (a) چون $\vec{BO} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{BD}$ ، بنابراین

$$O\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

(b) داریم:

$$\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC}, \vec{KD} = \frac{2}{3}\vec{OD}, \vec{DL} = -\frac{1}{3}\vec{BD} = -\frac{1}{3}(\vec{BO} + \vec{OD})$$

از آنجا

$$\begin{aligned}\vec{AL} &= \vec{AK} + \vec{KD} + \vec{DL} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{3}{2}\vec{OD} - \frac{1}{2}\vec{BO} - \frac{1}{2}\vec{OD} = \\ &= -\frac{1}{2}\vec{BO} + \vec{OD} + \frac{1}{2}\vec{AC}\end{aligned}$$

یعنی $L\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

مثال ۲.۶.۴. منشور $ABCA_1B_1C_1$ ، با قاعده‌های مثلثی، مفروض است. مختصات نقطه A_1 را در دستگاه $\{B_1, AC_1, CB_1, BA_1\}$ پیدا کنید. حل. داریم:

$$\vec{B_1A_1} = \vec{B_1B} + \vec{BA_1} = -\vec{AA_1} + \vec{BA_1}$$

و در مثال ۱.۵.۲ ثابت کردیم:

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{3}\vec{AC_1} + \frac{1}{3}\vec{CB_1} + \frac{1}{3}\vec{BA_1}$$

از آنجا

$$\begin{aligned}\vec{B_1A_1} &= -\frac{1}{3}\vec{AC_1} - \frac{1}{3}\vec{CB_1} - \frac{1}{3}\vec{BA_1} + \vec{BA_1} = \\ &= -\frac{1}{3}\vec{AC_1} - \frac{1}{3}\vec{CB_1} + \frac{2}{3}\vec{BA_1}\end{aligned}$$

در نتیجه: $A_1\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

مثال ۳.۶.۴. در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ ، مختصات سه رأس از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، چنین‌اند:

$$A(0, 1, -1), B(1, 0, 2), C(2, 3, 0)$$

مختصات رأس D را پیدا کنید.

حل. $D(x_D, y_D, z_D)$ می‌گیریم. در پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ داریم:

$$\vec{BC} = (1, 3, -2), \quad \vec{AD} = (x_D, y_D - 1, z_D + 1)$$

از طرف دیگر، بردارهای $\vec{AD}$ و $\vec{BC}$ ، به عنوان ضلع‌های رو به رو در متوازی‌الاضلاع، با هم برابرند، بنابراین:

$$1 = x_D, \quad 3 = y_D - 1, \quad -2 = z_D + 1$$

$$\text{از آن جا: } x_D = 1, y_D = 4, z_D = -3$$

مثال ۴.۶.۴. در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ داریم:

$$A(1, 0, -2), \quad B(-3, 4, 2), \quad C(0, 1, 3), \quad D(2, -1, 1)$$

ثابت کنید، نقطه‌های A, B, C و D ، روی یک صفحه‌اند. همچنین، ثابت کنید، بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ هم‌راستا و در دو جهت مختلف‌اند، و بردارهای $\vec{BC}$ و $\vec{AD}$ هم‌راستا نیستند.

حل. در پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ داریم:

$$\vec{AB} = (-4, 4, 4), \quad \vec{AC} = (-1, 1, 5), \quad \vec{AD} = (1, -1, 3)$$

نقطه‌های A, B, C و D ، تنها وقتی در یک صفحه واقع‌اند که، بردارهای $\vec{AB}, \vec{AC}$ و $\vec{AD}$ هم‌صفحه باشند. برای اثبات هم‌صفحه بودن این بردارها، کافی است تحقیق کنیم که دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

(۲.۳۶) را ببینید، برابر با صفر است. داریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (-4)8 - 4(-8) + 4 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

به این ترتیب، نقطه‌های A, B, C و D بر یک صفحه‌اند و به جز آن

$$\vec{CD} = (2, -2, -2), \quad \vec{AB} = (-4, 4, 4)$$

بنابر ویژگی خطی مختصات بردارها، $\vec{AB} = -\vec{CD}$ ، یعنی

$$\vec{AB} \parallel \vec{CD}, \vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{CD}$$

(قانون سوم ضرب بردار در يك عدد). سرانجام داریم:

$$\vec{BC} = (3, -3, 1), \vec{AD} = (1, -1, 3)$$

از آن جا که

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

با توجه به شرط خطی بودن (مثال ۱۹.۵.۲ را ببینید)، روشن می شود که دو بردار $\vec{AD}$ و $\vec{BC}$ هم راستا نیستند.

مثال ۵.۶.۲. در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ داریم:

$$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$$

مختصات نقطه برخورد میانه های مثلث ABC را پیدا کنید.

حل. اگر K ، نقطه وسط $[BC]$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \vec{AK} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}[(-\vec{OA} + \vec{OB}) + (-\vec{OA} + \vec{OC})] = \\ &= -\vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) \end{aligned}$$

اگر $N(x_N, y_N, z_N)$ ، نقطه برخورد میانه های مثلث ABC باشد، آن وقت

$$\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AK} = -\frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC}),$$

$$\vec{ON} = \vec{OA} + \vec{AN} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

که اگر شعاع های حامل بردارهای $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ را، نسبت به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ قرار دهیم، به دست می آید:

$$\begin{aligned}
 x_N \mathbf{e}_1 + y_N \mathbf{e}_2 + z_N \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{3}[(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2 + z_A \mathbf{e}_3) + \\
 &+ (x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2 + z_B \mathbf{e}_3) + (x_C \mathbf{e}_1 + y_C \mathbf{e}_2 + z_C \mathbf{e}_3)] = \\
 &= \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به منحصر به فرد بودن تجزیه نسبت به يك پایه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 x_N &= \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \quad y_N = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C), \\
 z_N &= \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

یعنی، مختصات نقطه برخورد سه میانه (مرکز ثقل مثلث)، برابر است با واسطه حسابی مختصات سه رأس.

انتقال دستگاه مختصات

دستگاه مختصات فضائی $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ را مفروض می‌گیریم و آن را، دستگاه «قدیم» می‌نامیم. به جز آن، دستگاه مختصات دیگر $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ را، نسبت به پایه دستگاه قدیم در نظر می‌گیریم و آن را دستگاه جدید می‌نامیم. فرض کنید، تجزیه‌های

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}'_1 &= a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + a_{23} \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{e}'_3 &= a_{31} \mathbf{e}_1 + a_{32} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3 \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

معرف بردارهای پایه جدید، نسبت به پایه قدیم باشند، و برای مختصات (α, β, γ) از نقطه O' (مبداء دستگاه جدید) در دستگاه قدیم داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3 \quad (2.40)$$

نقطه دلخواه M را در نظر می‌گیریم و، مختصات آن را، به ترتیب در

دستگاه‌های مختصات قدیم و جدید (x, y, z) و (x', y', z') فرض می‌کنیم:

$$\vec{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad \vec{O'M} = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 \quad (2.41)$$

دستورهای که مختصات (x, y, z) نقطه M در دستگاه قدیم را، بر حسب مختصات (x', y', z') این نقطه در دستگاه جدید، بیان کنند، دستورهای انتقال دستگاه قدیم به دستگاه جدید نامیده می‌شود. این دستورها را پیدا می‌کنیم.

از برابری روشن $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ ، بسا توجه به رابطه‌های (۲.۳۹) تا (۲.۴۱) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} xe_1 + ye_2 + ze_3 &= \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + x'(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \\ &+ a_{13}e_3) + y'(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) + z'(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + \\ &+ a_{33}e_3) = (a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + \alpha)e_1 + (a_{12}x' + a_{22}y' + \\ &+ a_{32}z' + \beta)e_2 + (a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + \gamma)e_3 \end{aligned}$$

به این ترتیب، در پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، دو تجزیه برای بردار $\vec{OM}$ به دست آوردیم. با توجه به منحصر بودن تجزیه بردار، نسبت به يك پایه فضائی، باید ضریب‌های متناظر در این دو تجزیه، برهم منطبق باشند:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + \alpha \\ y &= a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' + \beta \quad (2.42) \\ z &= a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + \gamma \end{aligned}$$

که همان دستورهای انتقال از يك دستگاه مختصات قدیم، به دستگاه جدیدند. در این دستورها، ضریب‌های x' ، مختصات بردار e'_1 در دستگاه قدیم [با (۲.۳۹) مقایسه کنید] و ضریب‌های y' و z' ، به ترتیب، مختصات بردارهای e'_2 و e'_3 در دستگاه قدیم اند. جمله‌های آخر در دستورهای (۲.۴۲)، معرف مختصات مبدا جدید O' در دستگاه مختصات قدیم اند.

ماتریس

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

که از ضریب‌های x' ، y' و z' در دستورهای (۲.۴۲) تشکیل شده است، معرف انتقال دستگاه قدیم به دستگاه جدید، یا ماتریس انتقال از پایه قدیم به پایه جدید است و ماتریس انتقال نام دارد.

ویژگی‌های ماتریس انتقال S

$$\det S \neq 0.1^\circ$$

□ بردارهای e'_1 ، e'_2 و e'_3 [(۲.۳۹) را ببینید]، هم صفحه نیستند و

بنابراین (مثال ۲۰.۵.۲ را ببینید)، دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مخالف صفر است. ولی این دترمینان، برابر با $\det S^T$ است و چون

$$\det S = \det S^T \quad (\text{ویژگی } 1^\circ \text{ در دترمینانها})$$

$$\blacksquare \det S = \Delta \neq 0$$

۲. اگر بردارهای پایه قدیم و جدید برهم منطبق باشند، آن وقت S ،

ماتریس واحد است و $\det S = 1$. در این حالت، انتقال از دستگاه مختصات قدیم به دستگاه مختصات جدید را، انتقال مبدأ گویند. دستورهای انتقال مبدأ چنین است:

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma$$

۳. ماتریس S' ، معرف انتقال از دستگاه جدید به دستگاه قدیم،

معکوس ماتریس S است:

$$S' = S^{-1}, \det S' = \frac{1}{\det S}$$

□ با استفاده از دستورکرامر، دستگاه معادله‌های زیر را حل می‌کنیم:

$$a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' = x - \alpha, \quad a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' = y - \beta,$$

$$a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' = z - \gamma$$

در این صورت [دستورهای (۲.۲۳) تا (۲.۲۵) و قضیه ۱.۴.۲ را ببینید]،
خواهیم داشت:

$$x' = b_{11}(x - \alpha) + b_{21}(y - \beta) + b_{31}(z - \gamma) =$$

$$= b_{11}x + b_{21}y + b_{31}z + \alpha',$$

$$y' = b_{12}(x - \alpha) + b_{22}(y - \beta) + b_{32}(z - \gamma) = \quad (۲.۴۳)$$

$$= b_{12}x + b_{22}y + b_{32}z + \beta',$$

$$z' = b_{13}(x - \alpha) + b_{23}(y - \beta) + b_{33}(z - \gamma) =$$

$$= b_{13}x + b_{23}y + b_{33}z + \gamma'$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \text{که در آن } B = \text{معکوس ماتریس } S \text{ است.}$$

بنابر ویژگی ماتریس معکوس: $\det B = \frac{1}{\det S}$. چون ستون‌های

ماتریس B ، از ضریب‌های x ، y و z در بیان مختصات جدید نقطه بر حسب مختصات قدیم آن، تشکیل شده است [(۲.۴۳) را ببینید]، پس $B = S'$ ، ماتریس انتقال دستگاه جدید به دستگاه قدیم (و یا از پایه جدید به پایه قدیم) است. ■
۴°. این سه دستگاه مختصات را تثبیت می‌کنیم:

$$(I) \{O, e_1, e_2, e_3\}, \quad (II) \{O', e'_1, e'_2, e'_3\},$$

$$(III) \{O'', e''_1, e''_2, e''_3\}$$

و فرض می‌کنیم، ماتریس‌های

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{21} & a''_{31} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{32} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} \end{pmatrix}$$

به ترتیب، ماتریس‌های انتقال از دستگاه مختصات (I) به دستگاه مختصات (II)، از دستگاه مختصات (II) به دستگاه مختصات (III) و از دستگاه مختصات (I) به دستگاه مختصات (III) باشند. ثابت می‌کنیم:

$$S_2 = SS_1 \quad (\det S_2 = \det S \det S_1)$$

□ با توجه به دستورهای (۲.۳۹) و (۲.۴۲) داریم:

$$e''_1 = a'_{11}e'_1 + a'_{12}e'_2 + a'_{13}e'_3,$$

$$e''_2 = a'_{21}e'_1 + a'_{22}e'_2 + a'_{23}e'_3,$$

$$e''_3 = a'_{31}e'_1 + a'_{32}e'_2 + a'_{33}e'_3,$$

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,$$

$$e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3,$$

$$e'_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3$$

از آنجا

$$\begin{aligned} e''_1 &= a'_{11}(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) + a'_{12}(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \\ &+ a_{23}e_3) + a'_{13}(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) = (a_{11}a'_{11} + a_{21}a'_{12} + \\ &+ a_{31}a'_{13})e_1 + (a_{12}a'_{11} + a_{22}a'_{12} + a_{32}a'_{13})e_2 + (a_{13}a'_{11} + \\ &+ a_{23}a'_{12} + a_{33}a'_{13})e_3 \end{aligned}$$

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned} e_1'' &= (a_{11}a'_{11} + a_{21}a'_{12} + a_{31}a'_{13})e_1 + (a_{12}a'_{11} + a_{22}a'_{12} + \\ &\quad + a_{32}a'_{13})e_2 + (a_{13}a'_{11} + a_{23}a'_{12} + a_{33}a'_{13})e_3, \\ e_2'' &= (a_{11}a'_{21} + a_{21}a'_{22} + a_{31}a'_{23})e_1 + (a_{12}a'_{21} + a_{22}a'_{22} + \\ &\quad + a_{32}a'_{23})e_2 + (a_{13}a'_{21} + a_{23}a'_{22} + a_{33}a'_{23})e_3 \end{aligned}$$

بنا بر این:

$$\begin{aligned} S_2 &= \begin{pmatrix} a_{11}a'_{11} + a_{21}a'_{12} + a_{31}a'_{13} \\ a_{12}a'_{11} + a_{22}a'_{12} + a_{32}a'_{13} \\ a_{13}a'_{11} + a_{23}a'_{12} + a_{33}a'_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}a'_{11} + a_{21}a'_{12} + a_{31}a'_{13} & a_{11}a'_{21} + a_{21}a'_{22} + a_{31}a'_{23} \\ a_{12}a'_{11} + a_{22}a'_{12} + a_{32}a'_{13} & a_{12}a'_{21} + a_{22}a'_{22} + a_{32}a'_{23} \\ a_{13}a'_{11} + a_{23}a'_{12} + a_{33}a'_{13} & a_{13}a'_{21} + a_{23}a'_{22} + a_{33}a'_{23} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} = SS_1, \end{aligned}$$

و $\det S_2 = \det S \det S_1$ ■

مثال ۶.۶.۲. $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ يك دستگاه مختصات فضائی است.

نقطه‌های $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-1, 2, 0)$ و $D(0, 0, 2)$ چهار رأس چهاروجهی $ABCD$ را تشکیل داده‌اند. وسط یال‌های $[AC]$ و $[DB]$ را، به ترتیب، K و L می‌گیریم. ماتریس S_2 را، برای انتقال از دستگاه مختصات $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ ، به دستگاه مختصات $\{B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$ پیدا کنید. دستورهای مربوط به انتقال از دستگاه مختصات اول به دستگاه مختصات دوم را بنویسید.

حل. در مثال ۱۲.۵.۲ دیدیم:

$$\vec{AC} = 0 \cdot \vec{AB} + 1 \cdot \vec{AC} + 0 \cdot \vec{AD},$$

$$\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD},$$

$$\vec{DB} = 1 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC} - 1 \cdot \vec{AD},$$

$$\vec{AB} = 1 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC} + 0 \cdot \vec{AD}$$

بنابراین:

$$x = 0 \cdot x' + \frac{1}{2}y' + z' + 1,$$

$$y = x' - \frac{1}{2}y' + 0 \cdot z' + 0,$$

$$z = 0 \cdot x' + \frac{1}{2}y' - z' + 0$$

دستورهای انتقال از دستگاه مختصات اول $\{A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$ به دستگاه مختصات دوم $\{B, \vec{AC}, \vec{KL}, \vec{DB}\}$ و

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

ماتریس انتقال است.

با توجه به ویژگی 4° ماتریس انتقال، ماتریس S_2 را به طریق دیگری هم می‌توان به دست آورد. می‌توان نوشت:

$$\vec{OA} = \mathbf{e}_1, \vec{OB} = 2\mathbf{e}_1, \vec{OC} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \vec{OD} = 2\mathbf{e}_3,$$

$$\vec{AB} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \vec{AC} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \vec{AD} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$$

یعنی

$$e_1 = \vec{AB} - \vec{AC}, \quad e_2 = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC},$$

$$e_3 = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

در نتیجه، ماتریس انتقال از پایه $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$ به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ چنین است:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

از آن جا که داریم:

$$\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) = e_2, \quad \vec{OL} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD}) = e_2 + e_3,$$

$$\vec{KL} = \vec{OL} - \vec{OK}$$

به دست می آید:

$$\vec{AC} = -2e_1 + 2e_2, \quad \vec{KL} = e_3, \quad \vec{DB} = \vec{OB} - \vec{OD} = 2e_2 - 2e_3$$

بنابراین، ماتریس انتقال S_1 از پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ به پایه $\{\vec{AC}, \vec{KL}, \vec{DB}\}$ چنین است:

$$S_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

بنابر ویژگی ۴، داریم:

$$S_2 = SS_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

(عمل ضرب دو ماتریس را، خودتان انجام دهید.)

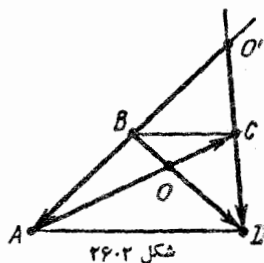
دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2\}$ در صفحه P ، به عنوان مجموعه‌ای شامل قطب O (نقطه‌ای ثابت O در صفحه P) و پایه $\{e_1, e_2\}$ از صفحه P ، تعریف می‌شود (شکل ۲۵.۲). مختصات نقطه $M \in P$ ، در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2\}$ ، عبارت است از ضرایب‌های تجزیه شعاع حامل بردار $\vec{OM}$ نسبت به پایه $\{e_1, e_2\}$. $\vec{OM} = xe_1 + ye_2$. اگر (x, y) مختصات نقطه M باشد، می‌نویسیم: $M(x, y)$. اگر در صفحه P ، دو دستگاه مختصات داده شده باشد: دستگاه قدیم $\{O, e_1, e_2\}$ و دستگاه جدید $\{O', e'_1, e'_2\}$ ، دستگاه مختصات جدید را می‌توان، با دستورهای زیر، از روی دستگاه مختصات قدیم، به دست آورد:

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$$

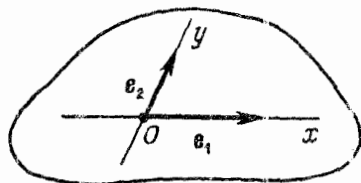
$$e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2, \quad \vec{OO'} = \alpha e_1 + \beta e_2 \quad (2.44)$$

همچنین، برای هر نقطه $M \in P$ ، رابطه بین مختصات (x, y) در دستگاه قدیم و مختصات (x', y') در دستگاه جدید، با دستورهای زیر مشخص می‌شود:

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + \alpha, \quad y = a_{12}x' + a_{22}y' + \beta \quad (۲.۴۰)$$



شکل ۲۶.۲



شکل ۲۵.۲

ماتریس $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ که ستون‌های آن، از ضرب‌های x' و y'

در (۲.۴۵) تشکیل شده است. ماتریس انتقال از دستگاه مختصات قدیم (یا پایه قدیم) به دستگاه مختصات جدید (یا پایه جدید)، در صفحه، نام دارد. ستون‌های ماتریس S ، از مختصات بردارهای e_1 و e_2 در پایه قدیم $\{e_1, e_2\}$ ساخته شده‌اند [با (۲.۴۴) مقایسه کنید]. برای ماتریس S ، یعنی ماتریس انتقال از دستگاه مختصات قدیم به دستگاه مختصات جدید، ویژگی‌های 1° تا 4° برقرارند، تنها در این جا، به جای ماتریس 3×3 ، با ماتریس 2×2 سروکار داریم.

مثال ۲.۶۰۲. در ذوزنقه $ABCD$ ($AD \parallel BC$)، نسبت طول‌های دو قاعده $|AD| : |BC| = 2$ ، نقطه O ، محل برخورد قطرهای $[AC]$ و $[BD]$ ، و نقطه O' ، محل برخورد امتدادهای $[AB]$ و $[CD]$ است. دستورهای انتقال از دستگاه مختصات $\{O, \vec{BA}, \vec{CD}\}$ را به دستگاه مختصات $\{O', \vec{OC}, \vec{OD}\}$ بنویسید.

حل. با توجه به این که، نسبت طول قاعده بزرگتر ذوزنقه به طول قاعده کوچکتر آن، برابر است با ۲، پاره خط راست $[BC]$ ، وسط دو ضلع مثلث $O'AD$ را بهم وصل می‌کند (شکل ۲۶.۲) و $[AC]$ و $[DB]$ ، میانه‌های این مثلث‌اند. بنابراین

$$\vec{O'A} = 2\vec{BA}, \quad \vec{O'D} = 2\vec{CD},$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{AO}' + \vec{AD})\right] = \frac{1}{6}[\vec{AO}' + (\vec{AO}' + \vec{O'D})] =$$

$$= \frac{1}{3}\vec{AO}' + \frac{1}{6}\vec{O'D} = -\frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{CD},$$

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = -\frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{4}{3}\vec{CD},$$

$$\vec{OO}' = \vec{OC} + \vec{CO}' = \vec{OC} - \vec{CD} = -\frac{2}{3}\vec{BA} - \frac{2}{3}\vec{CD}$$

به این ترتیب، دستورهای انتقال از دستگاه مختصات $\{O, \vec{BA}, \vec{CD}\}$ به دستگاه مختصات $\{O', \vec{OC}, \vec{OD}\}$ ، چنین است:

$$x = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x' + \frac{4}{3}y' - \frac{2}{3}$$

مثال ۸.۶.۲. دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2\}$ در صفحه داده شده است.

نقطه‌های $A(1, 1)$ ، $B(0, -3)$ و $C(2, 2)$ را رأس‌های مثلث ABC می‌گیریم. مختصات نقطه N ، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC را پیدا کنید. دستورهای انتقال از دستگاه مختصات $\{N, \vec{NO}, \vec{AC}\}$ را به دستگاه مختصات $\{O, \vec{AB}, \vec{BC}\}$ بنویسید.

حل. مختصات (x_N, y_N) ، از دستورهای (2.38) به دست می‌آیند:

$$x_N = \frac{1}{3}(1 + 0 + 2) = 1, \quad y_N = \frac{1}{3}(1 - 3 + 2) = 0$$

صفحه مثلث ABC را مطابق بر صفحه Oxy از يك دستگاه مختصات فضائی می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم: $z_A = z_B = z_C = z_N = 0$.

اکنون، دستورهای انتقال از دستگاه مختصات $\{N, \vec{NO}, \vec{AC}\}$

در صفحه (ABC) را، به دستگاه مختصات $\{O, \vec{AB}, \vec{BC}\}$ می‌نویسیم. مختصات

نقطه‌ای مثل M را در دستگاه $\{N, \vec{NO}, \vec{AC}\}$ برابر (x^*, y^*) و در دستگاه مختصات $\{O, \vec{AB}, \vec{BC}\}$ برابر (x', y') فرض می‌کنیم؛ یعنی:

$$\vec{NM} = x^* \vec{NO} + y^* \vec{AC}, \quad \vec{OM} = x' \vec{AB} + y' \vec{BC}$$

اگر از رابطه $\vec{NM} = \vec{NO} + \vec{OM}$ ، برای به‌دست آوردن دستورهای انتقال، و تجزیه همه بردارها، نسبت به پایه $\{e_1, e_2\}$ استفاده کنیم، داریم:

$$x^* (-\vec{ON}) + y^* (\vec{OC} - \vec{OA}) = -\vec{ON} + x' (\vec{OB} - \vec{OA}) + y' (\vec{OC} - \vec{OB})$$

و یا

$$x^* (-e_1) + y^* [(2e_1 + 2e_2) - (e_1 + e_2)] + e_1 - x' [-2e_2 - (e_1 + e_2)] - y' [(2e_1 + 2e_2) + 3e_2] = 0$$

از آن‌جا که، بردارهای e_1 و e_2 مستقل خطی‌اند، به دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} -x^* + y^* + 1 + x' - 2y' = 0 \\ y^* + x' - 5y' = 0 \end{cases}$$

می‌رسیم که اگر آن را، نسبت به x^* و y^* ، حل کنیم، به دست می‌آید:

$$x^* = -3x' + 3y' + 1, \quad y^* = -2x' + 5y'$$

مثال ۹.۶.۲. (معادله‌های مختصاتی خط راست). دستگاه مختصات

فضایی $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ و دو نقطه $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ را در نظر می‌گیریم. معادله‌هایی را بنویسید که معرف خط راست (AB) باشند. در واقع، باید دستگاهی از معادله‌ها را به دست آوریم، به نحوی که، مختصات هر نقطه $M(x, y, z)$ از خط راست (AB) ، در آن‌ها صدق کند.

حل. معادله پارامتری خط راست (AB) $l = (AB)$ را در نظر می‌گیریم

[مثال ۶.۳.۲ و دستور (۲.۵) را ببینید]. نقطه $M(x, y, z)$ تنها وقتی بر خط

راست l واقع است که، عدد t وجود داشته باشد، به نحوی که

$$\vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{a} \quad \text{که در آن}$$

$$\vec{a} = \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

چون، برابری برداری، با برابری سه مختص بردارها هم‌ارز است، تنها وقتی M متعلق به l است که داشته باشیم (برای $t \in \mathbb{R}$):

$$x = x_A + ta_x, \quad y = y_A + ta_y, \quad z = z_A + ta_z$$

$$(a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A, \quad a_z = z_B - z_A) \quad (۲.۴۶)$$

نقطه‌های A و B متمایزند، بنابراین، دست‌کم یکی از سه مختص a_x, a_y, a_z از بردار هادی $\vec{a} = \vec{AB}$ از خط راست l مخالف صفر است. مثلاً، فرض می‌کنیم $a_x \neq 0$. اگر t را از معادلهٔ اول محاسبه کنیم و در دو معادلهٔ دیگر قرار دهیم، به دستگاه معادله‌هایی بر حسب x, y و z می‌رسیم که، خط راست l را، درفضا، تعریف می‌کند:

$$y - y_A = \frac{x - x_A}{a_x} a_y, \quad z - z_A = \frac{x - x_A}{a_x} a_z$$

و یا

$$\begin{cases} a_x(y - y_A) = a_y(x - x_A), \\ a_x(z - z_A) = a_z(x - x_A) \end{cases} \quad (۲.۴۷)$$

این دستگاه معادله‌ها را، اغلب به‌صورت مقارن زیر می‌نویسند:

$$\frac{x - x_A}{a_x} = \frac{y - y_A}{a_y} = \frac{z - z_A}{a_z} \quad (۲.۴۸)$$

متوجه باشیم که، اگر مخارج یکی از کسرها، برابر صفر باشد، باید $[(۲.۴۷)]$ را ببینید] صورت آن نیز برابر صفر شود. مثلاً، اگر $a_y = 0$ و $a_z \neq 0$ ، آن وقت، دستگاه (۲.۴۸) به این صورت نوشته می‌شود:

$$y = y_A, \quad a_x(z - z_A) = a_z(x - x_A)$$

اگر $a_y = y_B - y_A = 0$ و $a_z = z_B - z_A = 0$ ، آن وقت، دستگاه معادله‌های (۲.۴۸) به صورت

$$y = y_A, \quad z = z_A$$

درمی‌آید، یعنی در این حالت، خط راست $l = (AB)$ ، با محور x ها موازی است و از نقطه $A(x_A, y_A, z_A)$ می‌گذرد. معادله‌های پارامتری (۲.۴۶) این خط راست، در این حالت، چنین‌اند:

$$x = x_A + a_x t, \quad y = y_A, \quad z = z_A, \quad t \in \mathbf{R} (a_x \neq 0)$$

چون $a_x = x_B - x_A$ ، $a_y = y_B - y_A$ و $a_z = z_B - z_A$ ، دستگاه معادله‌های (۲.۴۸) را، که معرف خط راست l است و از دو نقطه $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ می‌گذرد، می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \quad (2.49)$$

معادله‌های دستگاه‌های (۲.۴۸) و (۲.۴۹) را، معادله‌های متعارف (یا معادله‌های کانونی) خط راست l در فضا گویند.

مثال ۱۰۰۶.۲ خط راست l ، در دستگاه مختصات، با معادله‌های

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{0}$$

داده شده است. مختصات دو نقطه از این خط راست را، معین کنید.

حل. معادله پارامتری خط راست l را می‌نویسیم [بنا (۲.۴۸) و (۲.۴۶) مقایسه کنید]:

$$x = 1 - 2t, \quad y = -3 + t, \quad z = 5 + 0t$$

به ازای $t = 0$ و $t = 1$ ، دو نقطه از خط راست l به دست می‌آید:

$$A(1, -3, 5), \quad B(-1, -2, 5)$$

مختصات دو نقطه A و B را، با روش زیر هم می‌توان به دست آورد:

مختصات نقطه $A(x_A, y_A, z_A)$ ، با توجه به معادله‌های کانونی (۲.۴۸) چنین‌اند:

$$x_A = 1, \quad y_A = -3, \quad z_A = 5$$

برای مختصات نقطه $B(x_B, y_B, z_B)$ ، توجه می‌کنیم که، برای بردار

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

داریم: $a_x = -2, a_y = 1, a_z = 0$ ، که اگر با بردار $\overrightarrow{AB}$ از خط راست $l = (AB)$ مقایسه کنیم [(۲.۴۸) و (۲.۴۹)] را ببینید، به دست می‌آید:

$$x_B - x_A = -2, \quad y_B - y_A = 1, \quad z_B - z_A = 0$$

و بنابراین

$$x_B = x_A - 2 = -1, \quad y_B = y_A + 1 = -2, \quad z_B = z_A = 5$$

مثال ۰.۱۱۰۶۰۳. معادله‌های کانونی دو خط راست l_1 و l_2 ، در دستگاه مختصات، چنین‌اند:

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}, \quad l_2: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$$

تحقیق کنید که، این دو خط راست، متقاطع‌اند یا نه؟

حل. دو خط راست l_1 و l_2 تنها وقتی متقاطع‌اند که نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد، به نحوی که مختصات (x^*, y^*, z^*) آن، در هر دو معادله صدق کند، یعنی چهار معادله زیر، دارای جواب باشد:

$$x^* - 1 = 2(y^* - 2), \quad z^* - 3 = y^* - 2,$$

$$x^* = y^* - 3, \quad z^* = 2(y^* - 3) \quad (2.50)$$

برای این که، این دو خط راست متقاطع باشند، باید جوابی که از سه معادله اول به دست می‌آید، خود به خود در معادله چهارم صدق کند. از سه معادله اول، به دست می‌آید:

$$x^* = -3, y^* = 0, z^* = 1$$

که اگر در معادله چهارم قرار دهیم، به رابطه متناقض $1 = 2(0 - 3)$ می‌رسیم. دستگاه (۲.۵۰) جواب ندارد: دو خط راست l_1 و l_2 یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مثال ۱۲.۶.۲. (تقسیم يك پاره خط راست، به نسبت معلوم). دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ و دو نقطه متمایز $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ را در نظر می‌گیریم. نقطه M بر پاره خط راست $[AB]$ واقع است و آن را به نسبت $\lambda = |AM| : |MB|$ تقسیم می‌کند. مختصات نقطه M را پیدا کنید.

حل. با توجه به دستور (۲.۶) داریم:

$$\vec{OM} = \frac{1}{\lambda + 1} (\vec{OA} + \lambda \vec{OB})$$

به جای بردارها، در این برابری، عبارت‌های بر حسب پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ را قرار می‌دهیم. بنا بر ویژگی خطی مختصات و ویژگی 1° از مختصات بردارها، داریم:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + 1}, y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + 1}, z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{\lambda + 1} \quad (2.51)$$

مثال ۱۳.۶.۲. در متوازی‌السطوح $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ داریم:

$$A(1, 1, 1); B(2, -1, 0); C(1, 1, 2); D_1(3, 3, 2)$$

N را وسط $[AD]$ می‌گیریم و می‌دانیم نقطه M ، پاره خط راست $[CC_1]$ را، به نسبت $2 = |MC| : |C_1M|$ تقسیم می‌کند. معادله کانونی خط راست $l = (MN)$ را، در دستگاهی که A, B, C و D_1 در آن داده شده‌اند، بنویسید. حل. $D(x_D, y_D, z_D)$ می‌گیریم (شکل ۲.۷.۲). مختصات بردار $\vec{AD}$ چنین است: $(x_D - 1, y_D - 1, z_D - 1)$. مختصات بردار $\vec{BC}$ ، به صورت

$$(1 - 2, 1 - (-1), 2 - 0) = (-1, 2, 2)$$

درمی‌آید. بردارهای $\vec{AD}$ و $\vec{BC}$ برابرند، در نتیجه مختصات هم‌نام آن‌ها، باید برابر باشند، که از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$x_D = 0, \quad y_D = 3, \quad z_D = 3$$

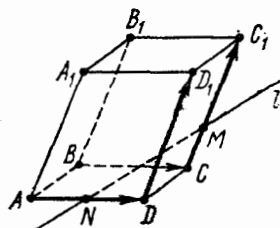
نقطه N وسط پاره‌خط راست

$[AD]$ است و آن را به نسبت ۱:۱ تقسیم

می‌کند، بنا براین:

$$x_N = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_N = \frac{y_A + y_D}{2} = 2, \quad z_N = 2$$



(α, β, γ) را، مختصات نقطه C_1 می‌گیریم.

از بزرابری بردارهای $\vec{DD_1}$ و $\vec{CC_1}$

به دست می‌آید:

شکل ۲۷.۲

$$\alpha - 1 = 3 - 0, \quad \beta - 1 = 3 - 3, \quad \gamma - 2 = 2 - 3$$

یعنی $\alpha = 4, \beta = 1, \gamma = 1$. با توجه به دستورهای (۲.۵۱)، برای تقسیم

یک پاره‌خط راست به نسبت معلوم، داریم:

$$x_M = \frac{\alpha + 2x_C}{3} = 2, \quad y_M = \frac{\beta + 2y_C}{3} = 1, \quad z_M = \frac{\gamma + 2z_C}{3} = \frac{5}{3}$$

به این ترتیب، معادله کانونی خط راست (MN) چنین می‌شود:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{z - 2}{\frac{5}{3} - 2}$$

و یا

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-\frac{1}{3}}$$

اگر معادله‌های کانونی دو خط راست l و L ، در يك دستگاه مختصات، چنین باشند:

$$l: \frac{x-\alpha}{a_x} = \frac{y-\beta}{a_y} = \frac{z-\gamma}{a_z}; L: \frac{x-\lambda}{b_x} = \frac{y-\mu}{b_y} = \frac{z-\nu}{b_z}$$

آن وقت $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ و $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ بردارهای هادی این دو خط راست اند. دو خط راست l و L ، تنها وقتی موازی اند که، بردارهای آنها، یعنی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، هم راستا باشند. به این ترتیب، شرط لازم و کافی، برای موازی بودن خط‌های راست l و L ، با توجه به شرط هم راستائی دو بردار، چنین است:

$$\begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x a_z \\ b_x b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix} = 0$$

P را يك صفحه، $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ را دستگاه مختصاتی در صفحه P و دو نقطه متمایز $A(x_A, y_A) \in P$ و $B(x_B, y_B) \in P$ در نظر می گیریم. معادله‌های پارامتری خط راست $l = (AB)$ چنین است:

$$x = x_A + t a_x,$$

$$y = y_A + t a_y \quad (a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A; t \in \mathbf{R}) \quad (2.52)$$

و معادله کانونی خط راست $l = (AB)$ در صفحه P :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad (2.53)$$

$$\frac{x - x_A}{a_x} = \frac{y - y_A}{a_y} \quad (2.54)$$

معادله (۲.۵۴)، هم‌ارز است با معادله

$$A^*x + B^*y + C^* = 0, \quad (A^*)^2 + (B^*)^2 > 0 \quad (2.55)$$

که در آن

$$A^* = y_B - y_A, \quad B^* = x_A - x_B, \quad C^* = y_A x_B - x_A y_B \quad (2.56)$$

بنابر معادله (۲.۵۵)، بردارهای $a(a_x = a_y)$ از خط راست l واقع در صفحه

P ، از رابطه‌های $a_y = A^*$ ، $a_x = -B^*$ به دست می‌آید.

دستورهای تقسیم يك پاره‌خط راست به نسبت معلوم، در حالت مسطحه

چنین‌اند:

$$M \in [AB], \quad \lambda = |AM| : |MB| \iff$$

$$\iff x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + 1}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + 1} \quad (2.57)$$

مثال ۱۴۰۶۰۲. دو نقطه A و B را طوری پیدا کنید که، نقطه

$C(-5, 4)$ پاره‌خط راست $[AB]$ را به نسبت ۳ : ۴، و نقطه $D(6, -5)$

آن را به نسبت ۲ : ۳ تقسیم کنید.

حل. فرض کنید: $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$. بنابر دستور (۲.۵۷)

داریم:

$$-5 = \frac{x_A + \frac{3}{4}x_B}{\frac{3}{4} + 1}, \quad 4 = \frac{y_A + \frac{3}{4}y_B}{\frac{3}{4} + 1},$$

$$6 = \frac{x_A + \frac{2}{3}x_B}{\frac{2}{3} + 1}, \quad -5 = \frac{y_A + \frac{2}{3}y_B}{\frac{2}{3} + 1}$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$x_A = 160, x_B = -225, y_A = -131, y_B = 184;$$

$$A(160, -131), B(-225, 184)$$

مثال ۱۵۰۶.۲. در مثلث ABC داریم: $A(-5, 4)$, $B(3, 1)$ و $C(2, -5)$. مطلوب است معادله میانه AM از مثلث ABC .

حل. نقطه M وسط پاره‌خط راست $[AB]$ است. بنابراین

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5}{2}, y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = -2$$

و بنابر دستور (2.53) ، برای معادله خط راست (AM) ، داریم:

$$\frac{x - (-5)}{\frac{5}{2} - (-5)} = \frac{y - 4}{-2 - 4} \iff 4x + 5y = 0$$

مثال ۱۶۰۶.۲. معادله خط راست l را طوری پیدا کنید که از نقطه

$M(7, 4)$ بگذرد و با خط راست L به معادله $3x - 2y = 4$ موازی باشد.

حل. بردار هادی $a = (a_x, a_y)$ از خط راست L ، عبارت است از

$a = (2, 3)$. چون l موازی L است، بنابراین، همین بردار a ، بردار هادی

خط راست l هم هست. بنا بر دستور (2.54) ، معادله خط راست l ، چنین است:

$$\frac{x - 7}{2} = \frac{y - 4}{3} \iff 3x - 2y - 13 = 0$$

مثال ۱۷۰۶.۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، می‌دانیم:

$$C(3, -1); (AB): x + y - 3 = 0; (AD): y = 2$$

مختصات رأس‌های $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $D(x_D, y_D)$ را پیدا کنید.

حل. دو خط راست (AB) و (AD) ، در نقطه A مشترک‌اند. بنابراین،

مختصات (x_A, y_A) باید در معادله‌های دستگاه

$$x_A + y_A - 3 = 0, y_A = 2$$

صدق کنند. از حل این دستگاه به دست می‌آید: $x_A = 1$ و $y_A = 2$ و $a = (-1, 1)$.
 بردارهای خط راست (AB) است که، در ضمن، بردارهای خط راست (CD) هم هست. بنا بر این، معادله (CD) چنین می‌شود:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow x+y-2=0$$

و به همین ترتیب، برای معادله خط راست (BC) به دست می‌آید: $y = -1$.
 مختصات نقطه‌های B و D ، به ترتیب، از این دستگاه‌ها، به دست می‌آیند:

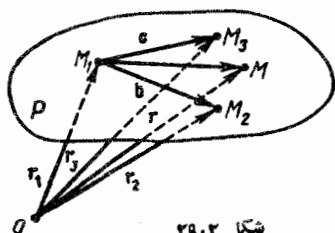
$$\begin{cases} x_B + y_B - 3 = 0 \\ y_B = -1 \end{cases}; \begin{cases} x_D + y_D - 2 = 0 \\ y_D = 2 \end{cases}$$

که از آن‌جا خواهیم داشت: $B(4, -1)$ و $D(0, 2)$.

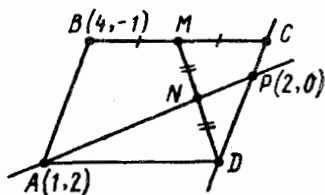
مثال ۱۸۰۶۰۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ (شکل ۲۸۰۲)، M وسط

ضلع $[BC]$ ، N وسط پاره خط راست $[MD]$ و نقطه برخورد دو خط راست (AN) و (CD) است. اگر بدانیم $A(1, 2)$ ، $B(4, -1)$ و $P(2, 0)$ ؛ مختصات دو نقطه C و D را پیدا کنید. نقطه P ، پاره خط راست $[CD]$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

حل. $D(\alpha, \beta)$ می‌گیریم. از برابری $\vec{AB} = \vec{DC}$ ، مختصات نقطه C



شکل ۲۹.۲



شکل ۲۸.۲

به دست می‌آید:

$$x_C = \alpha + (x_B - x_A) = \alpha + 3, \quad y_C = \beta + (y_B - y_A) = \beta - 3$$

و برای نقطه M ، وسط ضلع $[BC]$ ، داریم:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{\alpha + 7}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{\beta - 4}{2}$$

نقطه $N(x_N, y_N)$ وسط پاره خط راست $[MD]$ است، بنابراین:

$$x_N = \frac{x_M + x_D}{2} = \frac{3\alpha + 7}{4}, \quad y_N = \frac{y_M + y_D}{2} = \frac{3\beta - 4}{4}$$

معادله خط راست (AP) چنین است:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{0-2} \iff 2x + y - 4 = 0$$

نقطه N متعلق به خط راست (AP) است و، بنابراین، مختصات آن در معادله خط راست (AP) صدق می کند:

$$2 \frac{3\alpha + 7}{4} + \frac{3\beta - 4}{4} - 4 = 0 \iff 2\alpha + \beta - 2 = 0$$

داریم: $P(2, 0)$. نقطه P ، در ضمن، به خط راست (DC) تعلق دارد، که معادله آن، به این صورت است:

$$\frac{x-\alpha}{(\alpha+3)-\alpha} = \frac{y-\beta}{(\beta-3)-\beta}$$

مختصات نقطه P را در آن قرار می دهیم:

$$\frac{2-\alpha}{3} = \frac{0-\beta}{-3} \iff \alpha + \beta - 2 = 0$$

واز حل دستگاه معادله های $2\alpha + \beta - 2 = 0$ و $\alpha + \beta - 2 = 0$ ، به دست می آید: $\beta = 2, \alpha = 0$. سرانجام، نقطه P ، پاره خط راست $[CD]$ را، به نسبت $\lambda = |CP| : |PD|$ بخش می کند و می توانیم بنویسیم:

$$x_P = \frac{x_C + \lambda x_D}{\lambda + 1} \iff 2(\lambda + 1) = 3 + \lambda \cdot 0$$

و از آن جا $\lambda = \frac{1}{\gamma}$

مثال ۱۹۰۶۰۲. (معادله بردار پسادامتری صفحه). قطب O را در فضا ثابت می‌گیریم و فرض می‌کنیم، نقطه‌های M_1, M_2, M_3 بريك خط راست نباشند. مجموعه شعاع‌های حامل همه نقطه‌های واقع بر صفحه $P = (M_1 M_2 M_3)$ را مشخص کنید.

حل. $\vec{r}_1 = \vec{OM}_1, \vec{r}_2 = \vec{OM}_2, \vec{r}_3 = \vec{OM}_3$ می‌گیریم (شعاع‌های حامل نقطه‌های M_1, M_2, M_3 ; شکل ۲۹۰۲). بردارهای $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ و $\mathbf{c} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ ، يك پایه را در صفحه P تشکیل می‌دهند. فرض می‌کنیم، $\mathbf{r}$ شعاع حامل نقطه دلخواه $M \in P$ باشد. نقطه M ، تنها وقتی بر صفحه P واقع است که بردار $\vec{M_1 M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ نسبت به بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ ، قابل تجزیه باشد [دستور (۲۰۲۸)]. بنابراین، با توجه به معیار هم صفحه بودن (مثال ۲۰۵۰۲ را ببینید)، عددهای t و τ (وابسته به M) وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم: $\vec{M_1 M} = t\mathbf{b} + \tau\mathbf{c}$ ، یا

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \tau(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \quad (2.58)$$

رابطه

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{b} + \tau\mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R} \quad (2.59)$$

را معادله بردار پسادامتری صفحه P گویند، که از نقطه $M_1(\mathbf{r}_1)$ موازی بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ رسم شده باشد. سمت راست رابطه (۲۰۵۹)، به ازای عددهای حقیقی و دلخواه t و τ ، مجموعه شعاع‌های حامل همه نقطه‌های صفحه P ، و فقط آن‌ها را، مشخص می‌کند.

رابطه (۲۰۵۹) را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\mathbf{r} = \theta\mathbf{r}_1 + t\mathbf{r}_2 + \tau\mathbf{r}_3, \quad \theta + t + \tau = 1 \quad (2.60)$$

اگر نقطه‌های $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ در دستگاه مختصات $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ مفروض باشند، آن وقت، معادله بردار

پارامتری صفحه $P = (M_1 M_2 M_3)$ ، با دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + \tau(x_3 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) + \tau(y_3 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) + \tau(z_3 - z_1) \end{cases} \quad (2.61)$$

هم‌ارز است، که بستگی بین مختصات نقطه $M \in P$ را با عددهای t و τ مشخص می‌کند. معادله‌های دستگاه (۲.۶۱) را، معادله‌های پارامتری صفحه P گویند.

مثال ۲.۶۰.۲. (معادله مختصاتی صفحه). دستگاه مختصات فضائی

$\{O, e_1, e_2, e_3\}$ را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، معادله صفحه‌ای که بر نقطه‌ای مثل $M_1(x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0 \quad (2.62)$$

حل. دو نقطه ثابت $M_2(x_2, y_2, z_2)$ و $M_3(x_3, y_3, z_3)$ را در

صفحه P در نظر می‌گیریم، به نحوی که سه نقطه M_1 ، M_2 و M_3 واقع بر يك خط راست نباشند. قرار می‌دهیم:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad b_x = x_2 - x_1, \quad b_y = y_2 - y_1,$$

$$b_z = z_2 - z_1; \quad \overrightarrow{M_1 M_3} = \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z), \quad c_x = x_3 - x_1,$$

$$c_y = y_3 - y_1, \quad c_z = z_3 - z_1$$

نقطه $M(x, y, z)$ تنها وقتی بر صفحه P قرار دارد که بردارهای $\overrightarrow{M_1 M}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه باشند؛ و این شرط تنها وقتی برقرار است که، مختصات نقطه M ، در معادله زیر صدق کند:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (2.63)$$

و یا $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ که در آن

$$A = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

شرط $A^2+B^2+C^2>0$ را، هم راستا نبودن بردارهای **b** و **c** تأمین می‌کند (مثال ۱۹.۵.۲ را ببینید).

معادله (۲.۶۳) را، معادله مختصاتی صفحه‌ای گویند که از نقطه

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد و با بردارهای $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$ و $\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$ موازی است. این معادله را، به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.64)$$

معادله (۲.۶۴)، معادله صفحه $P=(M_1, M_2, M_3)$ است که از سه نقطه مفروض M_1, M_2, M_3 می‌گذرد. در ضمن، معادله (۲.۶۴) را به صورت

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A^2+B^2+C^2>0 \quad (2.65)$$

هم می‌توان نوشت که، در آن، $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$.

مثال ۲۱.۶.۲. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌های $M_1(2, 3, 1)$ ،

$M_2(3, 1, 4)$ و $M_3(2, 1, 5)$ می‌گذرد.

حل. با توجه به دستور (۲.۶۴)، برای معادله صفحه مطلوب داریم:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 3-2 & 1-3 & 4-1 \\ 2-2 & 1-3 & 5-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

که از آن جا به دست می‌آید: $x+2y+z-9=0$

مثال ۲۲.۶.۲. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $M_1(3, 7, 2)$

بگذرد و با خط‌های راست زیر موازی باشد:

$$l: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{2}; \quad L: \frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}$$

حل. چون صفحه مطلوب، با خط‌های راست l و L موازی است، بنابراین باید با بردارهای هادی آنها، یعنی $\mathbf{b} = (4, 1, 2)$ و $\mathbf{c} = (5, 3, 1)$ موازی باشد. با توجه به دستور (2.63) ، معادله این صفحه، چنین می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 5x - 6y - 7z + 41 = 0$$

مثال ۲۳.۶.۲. معادله صفحه‌ای مانند P را بنویسید که از $M_1(1, 0, -1)$

بگذرد و شامل خط راست $l: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$ باشد.

حل. نقطه $M_2(0, -1, 2)$ از خط راست l ، بر صفحه P قرار دارد و، بنابراین، صفحه P با بردار $\vec{M_1M_2}$ و بردار $\mathbf{b} = (2, 3, 1)$ موازی است. با توجه به دستور (2.63) ، معادله صفحه P چنین می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-(-1) \\ 0-1 & -1-0 & 2-(-1) \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 10x - 7y + z - 9 = 0$$

مثال ۲۴.۶.۲. (شرط موازی بودن دو صفحه). ثابت کنید، صفحه‌های

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0;$$

$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$$

تنها وقتی باهم موازی اند که بردارهای

$$\mathbf{N}_1 = (A_1, B_1, C_1) \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_2 = (A_2, B_2, C_2) \neq \mathbf{0}$$

هم‌راستا باشند، یعنی عدد $\lambda \neq 0$ وجود داشته باشد، به نحوی که

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1 \quad (۲.۶۶)$$

حل. فرض می‌کنیم، بین ضریب‌های معادله‌های دو صفحه P_1 و P_2 ، برابری‌های (۲.۶۶)، به‌ازای $\lambda \neq 0$ ، برقرار باشند. دراین صورت معادله صفحه P_2 به صورت

$$\lambda A_1 x + \lambda B_1 y + \lambda C_1 z + D_2 = 0$$

و یا

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + \frac{D_2}{\lambda} = 0$$

درمی‌آید. در حالتی که داشته باشیم: $D_1 = \frac{D_2}{\lambda}$ ، دو صفحه P_1 و P_2 برهم

منطبق می‌شوند؛ و در حالت $D_1 \neq \frac{D_2}{\lambda}$ ، دستگاه معادله‌های

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + \frac{D_2}{\lambda} = 0$$

ناسازگارند، یعنی P_1 و P_2 ، نقطه مشترکی ندارند و $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ ، بنابراین، صفحه‌های P_1 و P_2 موازی‌اند.

به این ترتیب، با تغییر مقدار ثابت D_1 در معادله صفحه P_1 ، می‌توانیم معادله‌های همه صفحه‌های موازی با P_1 را پیدا کنیم. درواقع، اگر صفحه P^* ، موازی با صفحه P باشد، به معنای آن است که صفحه P^* را می‌توان از صفحه P_1 ، با انتقال به اندازه برداری مثل $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ به دست آورد. دراین وضع، نقطه M^* به مختصات (x, y, z) ، تنها وقتی متعلق به صفحه P^* است که نقطه

$$M_1(x - a_x, y - a_y, z - a_z), \quad (\overrightarrow{M_1 M^*} = \mathbf{a}, \quad M^* = T_{\overrightarrow{M_1 M^*}}(M_1))$$

متعلق به صفحه P_1 باشد، یعنی

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D^* = 0, \quad D^* = D_1 - A_1 a_x - B_1 a_y - C_1 a_z$$

به این ترتیب، معادله صفحه P^* ، از معادله صفحه P_1 ، با تغییر مقدار ثابت D_1 به D^* ، به دست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم، صفحه‌های P_1 و P_2 موازی باشند، بنا بر آن چه گفته شد، صفحه‌های

$$P_1^*: A_1x + B_1y + C_1z + 1 = 0 \quad , \quad P_2^*: A_2x + B_2y + C_2z = 0$$

نیز باهم موازی‌اند ($P_1^* \parallel P_1 \parallel P_2 \parallel P_2^*$)، ولی برهم منطبق نیستند (زیرا نقطه $O(0, 0, 0)$ در صفحه P_2^* قرار دارد، در حالی که بر صفحه P_1^* واقع نیست). صفحه‌های P_1^* و P_2^* ، نقطه مشترکی ندارند و، بنا بر این، دستگاه معادله‌های

$$A_1x + B_1y + C_1z = -1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = 0$$

دارای جواب نیست. به این ترتیب، هیچ کدام از دستگاه‌های زیر جواب ندارند:

$$(I) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \\ 0.x + 0.y + 1.z = 0 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \\ 0.x + 1.y + 0.z = 0 \end{cases}$$

$$(III) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \\ 1.x + 0.y + 0.z = 0 \end{cases}$$

و با توجه به دستور کرامر (بخش ۴.۲)، دترمینان ماتریس ضریب‌های هر کدام از این دستگاه‌ها ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$)، برابر صفر است، یعنی

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

با توجه به شرط هم راستائی (مثال ۱۹.۵.۲ را ببینید)، بردارهای $N_1 \neq 0$ و $N_2 \neq 0$ هم راستا هستند، یعنی برای عددی مثل $\lambda \neq 0$ داریم: $N_2 = \lambda N_1$ ، که اگر این برابری را، به صورت مختصات بنویسیم، به همان رابطه (۲.۶۶) می‌رسیم.

مثال ۲۵.۶.۲. $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$ ، $Ax + By + Cz + D = 0$ را، معادله صفحه P می‌گیریم. ثابت کنید، بردارهای غیر هم راستای $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ و $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$A = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \quad (2.67)$$

همچنین ثابت کنید، بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ با صفحه P موازی‌اند.
حل. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ را نقطه‌ای از صفحه P می‌گیریم؛ یعنی

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

بردار $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ، تنها وقتی با صفحه P موازی است که نقطه

$$M_2(x_1 + a_x, y_1 + a_y, z_1 + a_z)$$

بر صفحه P واقع باشد، یعنی داشته باشیم:

$$A(x_1 + a_x) + B(y_1 + a_y) + C(z_1 + a_z) + D = 0$$

یا

$$Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0 \quad (2.68)$$

شرط (2.68)، شرط لازم و کافی است برای این که بردار $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ بر صفحه P به معادله $Ax + By + Cz + D = 0$ موازی باشد.

فرض کنید $\mathbf{b}' = (b'_x, b'_y, b'_z)$ و $\mathbf{c}' = (c'_x, c'_y, c'_z)$ ، دو بردار دلخواه موازی با صفحه P باشند. در این صورت، یکی از معادله‌های صفحه P ، به صورت

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

نوشته می‌شود که در آن

$$A' = \begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix}, \quad -B' = \begin{vmatrix} b'_x & b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix}, \quad C' = \begin{vmatrix} b'_x & b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix},$$

$$D' = -A'x_1 - B'y_1 - C'z_1$$

صفحه P با خودش موازی است. با توجه به نتیجه مثال قبل، عدد λ را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$A = \lambda A' = \lambda \begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b'_y & \lambda b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix},$$

$$B = - \begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix}$$

و این به معنای آن است که بردارهای $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}'$ و $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ را می‌توان همان بردارهای مورد نظر دانست.

اکنون، فرض کنید، بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در (2.67) صدق کنند، بنا بر این

$$Ab_x + Bb_y + Cb_z = b_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - b_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} +$$

$$+ b_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0,$$

$$Ac_x + Bc_y + Cc_z = c_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} +$$

$$+ c_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

و با توجه به (۲.۶۸)، هریک از دو بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ ، با صفحه P موازی است.

مثال ۲.۶۰.۴. دوزنقه $ABCD$ ، قاعده منشور $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ است:

$AB \parallel CD$ و $|AB| : |CD| = \lambda < 1$. از نقطه B ، صفحه‌ای گذشته است

که یال‌های $[AA_1]$ و $[CC_1]$ و خط راست (DD_1) را، به ترتیب، در نقطه‌های

M ، N و P قطع کرده است و می‌دانیم

$$|AM| : |AA_1| = m, \quad |CN| : |CC_1| = n$$

نسبت $|DP| : |DD_1|$ را پیدا کنید.

حل. $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{DA}$ ، $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{DC}$ و $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{DD_1}$ می‌گیریم (شکل ۳۰.۲).

رأس‌های منشور در دستگاه مختصات $\{D, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ چنین‌اند:

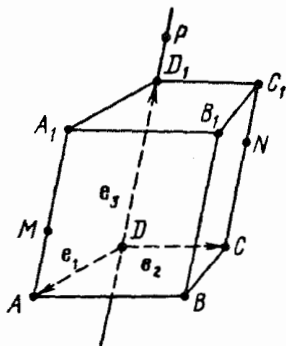
$$A(1, 0, 0); \quad B(x_B, y_B, 0); \quad C(0, 1, 0); \quad D(0, 0, 0);$$

$$A_1(1, 0, 1); \quad B_1(x_B, y_B, 1); \quad C_1(0, 1, 1); \quad D_1(0, 0, 1)$$

مختصات نقطه $B(x_B, y_B, 0)$ را محاسبه می‌کنیم (این نقطه بر صفحه

(DAC) قرار دارد و به همین مناسبت، مختص سوم آن برابر صفر است).

بنا بر فرض $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ و یا



شکل ۳۰.۲

$$e_y = \lambda[(x_B - 1)e_1 + y_B e_2 + 0e_3]$$

که از آن جا به دست می آید:

$$\lambda(x_B - 1) = 0,$$

$$\lambda y_B = 1 \iff x_B = 1,$$

$$y_B = \frac{1}{\lambda}$$

علاوه بر این، بنا بر فرض داریم:

$$\vec{AM} = (x_M - 1, y_M, z_M)$$

$$= m\vec{AA_1}, \vec{AA_1} = (0, 0, 1)$$

بنابراین

$$x_M - 1 = m \cdot 0 = 0; \quad y_M = m \cdot 0 = 0; \quad z_M = m \cdot 1 = m$$

یعنی $M(1, 0, m)$ با روشی مشابه به دست می آید: $N(0, 1, n)$. معادله

صفحه (BMN) چنین است $[(2.64)]$ را ببینید:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-\frac{1}{\lambda} & z-0 \\ 1-1 & 0-\frac{1}{\lambda} & m-0 \\ 0-1 & 1-\frac{1}{\lambda} & n-0 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(x-1) - m\left(y-\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z}{\lambda} = 0$$

نقطه $P(0, 0, z_P)$ بر محور z ها قرار دارد و، بنابراین، دو مختص اول آن صفر است. با توجه به شرط: $P \in (BMN)$ ، و خواهیم داشت:

$$\frac{m-n-\lambda m}{\lambda} (0-1) - m \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z_p}{\lambda} = 0$$

یعنی $z_p = n + \lambda m$ و سرانجام

$$|DP| : |DD_1| = |z_p e_3| : |e_3| = |z_p| = n + \lambda m$$

مثال ۰۲۷.۶۰۲. نقطه K در درون چهار وجهی $ABCD$ واقع است.

نقطه‌های A' , B' , C' و D' ، به ترتیب، نقطه‌های برخورد خط‌های راست (AK) , (BK) , (CK) و (DK) با صفحه‌های ABD , ACD , BCD و ABC هستند. ثابت کنید:

$$\frac{|A'K|}{|AA'|} + \frac{|B'K|}{|BB'|} + \frac{|C'K|}{|CC'|} + \frac{|D'K|}{|DD'|} = 1$$

حل. دستگاه مختصات $\{A, AB, AC, AD\}$ را در نظر می‌گیریم.

در این دستگاه داریم:

$$A(0, 0, 0); B(1, 0, 0); C(0, 1, 0); D(0, 0, 1)$$

فرض می‌کنیم: $K(m, n, p)$ ، بنا بر این

$$\vec{AK} = (m, n, p); \vec{BK} = (m-1, n, p);$$

$$\vec{CK} = (m, n-1, p); \vec{DK} = (m, n, p-1)$$

معادله‌های خط‌های راست، چنین‌اند:

$$(AK): \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}; (BK): \frac{x-1}{m-1} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p};$$

$$(CK): \frac{x}{m} = \frac{y-1}{n-1} = \frac{z}{p}; (DK): \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{p-1}$$

و معادله‌های صفحه‌ها:

$$(BCD): \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \iff x+y+z-1=0;$$

$$(ACD): \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x = 0;$$

$$(ABD): y = 0; (ABC): z = 0$$

مختصات نقطه $A' = (AK) \cap (BCD)$ از دستگاه معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x = mt \\ y = nt \\ z = pt \end{cases} \iff$$

$$\iff A' \left(\frac{m}{m+n+p}, \frac{n}{m+n+p}, \frac{p}{m+n+p} \right)$$

و مختصات نقطه B' از دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 + (m-1)t \\ y = nt \\ z = pt \end{cases} \iff B' \left(0, \frac{n}{1-m}, \frac{p}{1-m} \right)$$

و به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$C' \left(\frac{m}{1-n}, 0, \frac{p}{1-n} \right), D' \left(\frac{m}{1-p}, \frac{n}{1-p}, 0 \right)$$

به جز این‌ها داریم:

$$\vec{A'A} = \left(\frac{-m}{m+n+p}, \frac{-n}{m+n+p}, \frac{-p}{m+n+p} \right),$$

$$\begin{aligned}\vec{A'K} &= \left(m - \frac{m}{m+n+p}, n - \frac{n}{m+n+p}, p - \frac{p}{m+n+p} \right) = \\ &= \left(\frac{-m(1-(m+n+p))}{m+n+p}, \frac{-n(1-(m+n+p))}{m+n+p}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-p(1-(m+n+p))}{m+n+p} \right)\end{aligned}$$

یعنی $\vec{A'K} = [1 - (m+n+p)] \vec{A'A}$ بردارهای $\vec{A'K}$ و $\vec{A'A}$ هم‌جهت‌اند، بنابراین $1 - (m+n+p) > 0$

$$|A'K| : |AA'| = 1 - (m+n+p)$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

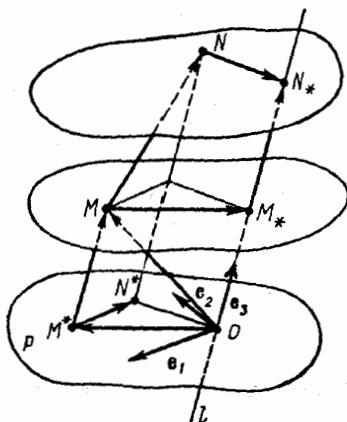
$$\frac{|B'K|}{|BB'|} = m, \quad \frac{|C'K|}{|CC'|} = n, \quad \frac{|D'K|}{|DD'|} = p$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{|A'K|}{|AA'|} + \frac{|B'K|}{|BB'|} + \frac{|C'K|}{|CC'|} + \frac{|D'K|}{|DD'|} = 1$$

بخش ۷.۲. تصویر موازی

صفحه P ، و خط راست l را که با صفحه P موازی نیست، در نظر می‌گیریم (شکل ۳۱.۲). تصویر نقطه M بر صفحه P و موازی با خط راست l ، به نقطه‌ای مانند $M^* \in P$ گفته می‌شود، به نحوی که بردار $\vec{M^*M}$ با خط راست l موازی باشد و می‌نویسند: $M^* = \text{Pr}_P^l(M)$. نقطه M^* ، تنها نقطه‌ای است که از برخورد صفحه P با خط راستی که از M موازی با l رسم شود، به دست می‌آید. O را، نقطه برخورد خط راست l با صفحه P فرض می‌کنیم. دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ را به نحوی در نظر می‌گیریم که $\{e_1, e_2\}$ پایه‌ای در صفحه P و بردار e_3 موازی با خط راست l باشد.



شکل ۳۱.۲

مختصات نقطه‌های M و M^* را در این دستگاه مختصات، به ترتیب

$$(x_M, y_M, z_M), (x_M^*, y_M^*, z_M^*)$$

می‌گیریم. چون بردارهای

$$\overrightarrow{M^*M} = (x_M - x_M^*, y_M - y_M^*, z_M - z_M^*), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

هم‌راستا هستند، داریم:

$$\begin{aligned} |x_M - x_M^* \quad y_M - y_M^*| &= |x_M - x_M^* \quad z_M - z_M^*| = \\ &= |y_M - y_M^* \quad z_M - z_M^*| = 0 \end{aligned}$$

بنابراین $x_M = x_M^*$ و $y_M = y_M^*$. نقطه M^* بر صفحه $P = Oxy$ قرار دارد؛ بنابراین $z_M^* = 0$ برابر صفر است. به این ترتیب، با معلوم بودن مختصات نقطه M در یک دستگاه مختصات، می‌توان مختصات نقطه $M^* = \text{Pr}_P^l(M)$ را با این دستورها پیدا کرد:

$$x_M = x_M^*, \quad y_M = y_M^*, \quad z_M^* = 0$$

تصویر پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ بر صفحه P و موازی خط راست l ، یعنی $\text{Pr}_P^l(MN)$ ، عبارت است از پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{M^*N^*}$ ، به نحوی که، برای آن، داشته باشیم:

$$M^* = \text{Pr}_P^l(M), \quad N^* = \text{Pr}_P^l(N)$$

اگر $M(x_M, y_M, z_M)$ و $N(x_N, y_N, z_N)$ و بنابراین

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M)$$

در پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ باشد، آن وقت خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{M^*N^*} = (x_N - x_M, y_N - y_M, 0)$$

d را يك بردار فرض می‌کنیم. تصویر آن بر صفحه P و موازی خط راست l ، یعنی $d^* = \text{Pr}_P^l(d)$ ، با برابری

$$d^* = \text{Pr}_P^l(\overrightarrow{MN})$$

تعریف می‌شود که، در آن، پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ ، معرف بردار d در فضا باشد. این تعریف، مستقل از انتخاب پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ (که بردار d را مشخص می‌کند) می‌باشد.

□ در واقع، اگر $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN} = d$ ، آن وقت

$$x_L - x_K = x_N - x_M, \quad y_L - y_K = y_N - y_M, \quad z_L - z_K = z_N - z_M$$

و بنابراین

$$\overrightarrow{K^*L^*} = (x_L - x_K, y_L - y_K, 0) = (x_N - x_M, y_N - y_M, 0) = \overrightarrow{M^*N^*}$$

چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. ■

اگر $d = (d_x, d_y, d_z)$ ، یعنی $\overrightarrow{MN} = (d_x, d_y, d_z)$ ، در پایه انتخابی

ما باشد، آن وقت

$$d^* = \text{Pr}_P^l(d) = (d_x, d_y, 0)$$

عمل ساختن تصویر يك بردار بر صفحه P و موازی خط راست l ،

يك عمل خطی است: برای بردارهای $\mathbf{d}$ و $\mathbf{f}$ و عددهای دلخواه α و β ، همیشه داریم:

$$\text{Pr}_P^l(\alpha \mathbf{d} + \beta \mathbf{f}) = \alpha \text{Pr}_P^l(\mathbf{d}) + \beta \text{Pr}_P^l(\mathbf{f}) \quad (۲.۶۹)$$

□ اگر $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$ و $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ ، آن گاه

$$\alpha \mathbf{d} + \beta \mathbf{f} = (\alpha d_x + \beta f_x, \alpha d_y + \beta f_y, \alpha d_z + \beta f_z)$$

بنا بر این:

$$\text{Pr}_P^l(\alpha \mathbf{d} + \beta \mathbf{f}) = (\alpha d_x + \beta f_x, \alpha d_y + \beta f_y, ۰)$$

به جز آن

$$\text{Pr}_P^l(\mathbf{d}) = (d_x, d_y, ۰), \quad \alpha \text{Pr}_P^l(\mathbf{d}) = (\alpha d_x, \alpha d_y, ۰);$$

$$\text{Pr}_P^l(\mathbf{f}) = (f_x, f_y, ۰), \quad \beta \text{Pr}_P^l(\mathbf{f}) = (\beta f_x, \beta f_y, ۰)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\alpha \text{Pr}_P^l(\mathbf{d}) + \beta \text{Pr}_P^l(\mathbf{f}) = (\alpha d_x + \beta f_x, \alpha d_y + \beta f_y, ۰)$$

و بنابراین، درستی برابری (۲.۶۹) ثابت می شود. ■

مثال ۲.۷.۲. (معیاری برای موازی بودن خط (است و صفحه). خط

راست l ، به معادله $\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$ و صفحه P به معادله

$$Ax + By + Cz + D = ۰, \quad A^2 + B^2 + C^2 > ۰$$

مفروض اند. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این که خط راست l با صفحه P موازی باشد.

حل. خط راست l تنها وقتی با صفحه P موازی است که، بردارهای

خط راست l ، یعنی $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ، با صفحه P موازی باشد، یعنی

$$Aa_x + Ba_y + Ca_z = ۰$$

[شرط (۲.۶۸) را ببینید].

مثال ۲.۷.۲. صفحه P و خط راست l ، در فضا داده شده اند:

$$P: Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0;$$

$$l: \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}, \quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 > 0$$

رابطه‌هایی را پیدا کنید که مختصات نقطه $M(x_M, y_M, z_M)$ را، با مختصات تصویر آن بر صفحه P موازی خط راست l ، $M^*(x^*, y^*, z^*)$ ، مربوط کنند. حل. $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ بردارهای خط راست l است. بنابراین تعریف تصویر، عددی مانند $t = t_M$ (وابسته به M) وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\overrightarrow{M^*M} = t\mathbf{a}$ و یا

$$x_M - x^* = ta_x, \quad y_M - y^* = ta_y, \quad z_M - z^* = ta_z$$

یعنی

$$x^* = x_M - ta_x, \quad y^* = y_M - ta_y, \quad z^* = z_M - ta_z$$

مختصات (x^*, y^*, z^*) نقطه M^* ، در صفحه P صدق می‌کند:

$$A(x_M - ta_x) + B(y_M - ta_y) + C(z_M - ta_z) + D = 0$$

که با توجه به $Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0$ (مثال ۱۰.۷.۲ را ببینید)، به دست می‌آید:

$$t_M = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{Aa_x + Ba_y + Ca_z},$$

$$x^* = \frac{x_M(Ba_y + Ca_z) - a_x(By_M + Cz_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z},$$

$$y^* = \frac{y_M(Aa_x + Ca_z) - a_y(Ax_M + Cz_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}, \quad (۲.۷۰)$$

$$z^* = \frac{z_M(Aa_x + Ba_y) - a_z(Ax_M + By_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}$$

مثال ۳.۷.۲. تصویر بردار $\mathbf{b} = (۱, ۰, -۲)$ را موازی با خط

راست I به معادله $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{1}$ بر صفحه P به معادله

$$x - 2y + z - 4 = 0$$

به دست آورید.

حل. از رابطه‌های (۲.۷۰) استفاده می‌کنیم. نقطه $N(0, 0, 4)$ بر صفحه P قرار دارد، بنا بر این $N^* = \text{Pr}_P^I(N) = N$. اکنون، نقطه $M(1, 0, 2)$ را در نظر می‌گیریم، به نحوی که $\vec{NM} = \mathbf{b}$. بنا به رابطه‌های (۲.۷۰)، مختصات نقطه $M^*(x^*, y^*, z^*)$ ، تصویر نقطه M ، داریم:

$$x^* = \frac{1[(-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1] - 2[(-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 4]}{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1} = 3,$$

$$y^* = 1, \quad z^* = 3$$

در نتیجه

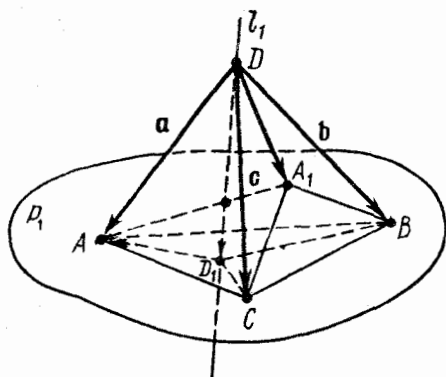
$$\text{Pr}_P^I(\mathbf{b}) = \vec{N^*M^*}(3, 1, -1)$$

مثال ۰.۴.۷۰۲ در چهاروجهی $ABCD$ ، نقطه برخورد میان‌ها را در مثلث‌های ABC ، BCD ، CDA و DAB ، به ترتیب، D_1 ، A_1 ، B_1 و C_1 می‌نامیم. صفحه‌های (ABC) ، (BCD) ، (CDA) و (DAB) را، به ترتیب، با P_1 ، P_2 ، P_3 و P_4 و خط‌های راست (DD_1) ، (AA_1) ، (BB_1) و (CC_1) را با l_1 ، l_2 ، l_3 و l_4 نشان می‌دهیم. بردار زیر را، برای بردار دلخواه $\mathbf{d}$ مشخص کنید:

$$\Gamma(\mathbf{d}) = \text{Pr}_{P_1}^I(\mathbf{d}) + \text{Pr}_{P_2}^I(\mathbf{d}) + \text{Pr}_{P_3}^I(\mathbf{d}) + \text{Pr}_{P_4}^I(\mathbf{d})$$

حل. بردارهای $\vec{a} = \vec{DA}$ ، $\vec{b} = \vec{DB}$ و $\vec{c} = \vec{DC}$ هم صفحه نیستند و یک پایه را در فضا تشکیل می‌دهند. بردار $\mathbf{d}$ را در رابطه با این بردارها، می‌توان به صورت

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$$



شکل ۳۲.۲

نشان داد. با استفاده از خطی بودن عمل تصویر، داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{d}) &= \Gamma(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) + \\ &+ \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) + \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) + \\ &+ \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \{\alpha\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{a}) + \beta\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{b}) + \\ &+ \gamma\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{c})\} + \dots + \{\alpha\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{a}) + \beta\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{b}) + \gamma\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{c})\} = \\ &= \alpha\{\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{a}) + \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{a}) + \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{a}) + \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{a})\} + \\ &+ \beta\{\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{b}) + \dots + \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{b})\} + \\ &+ \gamma\{\text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{c}) + \dots + \text{Pr}_{P_1}^{\downarrow}(\mathbf{c})\} = \alpha\Gamma(\mathbf{a}) + \beta\Gamma(\mathbf{b}) + \gamma\Gamma(\mathbf{c}) \end{aligned}$$

بنابراین، برای پیدا کردن $\Gamma(\mathbf{d})$ ، کافی است $\Gamma(\mathbf{a})$ ، $\Gamma(\mathbf{b})$ و $\Gamma(\mathbf{c})$ را بشناسیم. چون بردار $\mathbf{a}$ با صفحه‌های P_3 و P_4 موازی است (پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{DA}$ ، معرف بردار $\mathbf{a}$ ، در صفحه‌های P_3 و P_4 قرار دارد)، بنابراین

$$\text{Pr}_{P_3}^{\downarrow}(\mathbf{a}) = \text{Pr}_{P_4}^{\downarrow}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

با توجه به نتیجه مثال ۱۲.۵: $\overrightarrow{DD_1} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ از این‌جا

$$\text{Pr}_{P_1}^1(a) = D_1 \vec{A} = -\vec{DD}_1 + \vec{DA} = a - \frac{1}{3}(a+b+c)$$

(شکل ۳۲.۲). با توجه به ویژگی میانه‌ها در مثلث BCD داریم:

$$\text{Pr}_{P_1}^1(a) = \vec{DA}_1 = \frac{1}{3}(b+c)$$

و بنابراین

$$\Gamma(a) = a - \frac{1}{3}(a+b+c) + \frac{1}{3}(b+c) + a + a = \frac{2}{3}a$$

و به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$\Gamma(b) = \frac{2}{3}b, \quad \Gamma(c) = \frac{2}{3}c$$

که، از آن‌جا، سرانجام خواهیم داشت:

$$\Gamma(d) = \alpha\Gamma(a) + \beta\Gamma(b) + \gamma\Gamma(c) = \alpha \cdot \frac{2}{3}a +$$

$$+ \beta \cdot \frac{2}{3}b + \gamma \cdot \frac{2}{3}c = \frac{2}{3}d$$

صفحه P و خط راست l را، که با P موازی نیست، در فضا در نظر می‌گیریم (شکل ۳۱.۲ را ببینید). تصویر $\text{Pr}_l^P(M)$ ، یعنی تصویر نقطه M بر خط راست l به موازات صفحه P ، به نقطه‌ای مانند $M_0 \in l$ گفته می‌شود که از برخورد خط راست l با صفحه‌ای که از M موازی صفحه P شود، به دست آمده باشد. در واقع، بردار $\vec{MM}_0$ با صفحه P موازی است.

در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ (شکل ۳۱.۲) که، در آن، پایه $\{e_1, e_2\}$ در صفحه P ، $e_3 \parallel l$ و $O = l \cap P$ ، می‌توان مختصات نقطه M_0 ، یعنی $(x_{M_0}, y_{M_0}, z_{M_0})$ را، با استفاده از x_M, y_M, z_M (مختصات نقطه M) و شرط‌های $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{M}_0\vec{M}$ ، $\vec{OM}_0 \parallel e_3$ و $\vec{MM}_0 \parallel P$ به دست آورد. معادله صفحه P ، در این دستگاه مختصات $z=0$ است؛ در واقع، صفحه P از

سه نقطه $(0, 0, 0)$ ، $(0, 0, 1)$ و $(0, 1, 0)$ می‌گذرد و، بنا براین، معادله آن، چنین می‌شود:

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} \iff 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \iff z = 0$$

بردار $\vec{MM}_* = (x_{*M} - x_M, y_{*M} - y_M, z_{*M} - z_M)$ با صفحه P موازی است. با توجه به رابطه (۲.۶۸) خواهیم داشت:

$$0 \cdot (x_{*M} - x_M) + 0 \cdot (y_{*M} - y_M) + 1 \cdot (z_{*M} - z_M) = 0$$

یعنی $z_{*M} = z_M$. چون نقطه M_* بر محور z ها قرار دارد، دو مختص اول آن برابر صفر می‌شود. بنا براین، با معلوم بودن مختصات نقطه M ، مختصات نقطه $M_* = \text{Pr}_l^P(M)$ ، چنین می‌شود: $M_*(0, 0, z_M)$.

تصویر $\text{Pr}_l^P(\vec{MN})$ ، پاره خط راست جهت‌دار $\vec{MN}$ بر خط راست l و موازی صفحه P ، عبارت است از پاره خط راست جهت‌دار $\vec{M_*N_*}$ که، در آن، $M_* = \text{Pr}_l^P(M)$ و $N_* = \text{Pr}_l^P(N)$ اگر

$$M(x_M, y_M, z_M), N(x_N, y_N, z_N)$$

آن گاه مختصات بردار $\vec{M_*N_*}$ به صورت $(0, 0, z_N - z_M)$ درمی‌آید. $\mathbf{d}_* = \text{Pr}_l^P(\mathbf{d})$ ، تصویر بردار $\mathbf{d}$ بر خط راست l و موازی صفحه P ، بنا به تعریف، به بردار $\mathbf{d}_* = \text{Pr}_l^P(\vec{MN})$ گفته می‌شود که، در آن، $\vec{MN}$ ، پاره خط راست جهت‌داری است که بردار $\mathbf{d}$ را معرفی می‌کند. این تعریف، برای هر پاره خط راست جهت‌داری که معرف $\mathbf{d}$ باشد، درست و مستقل از انتخاب $\vec{MN}$ است. اگر در دستگاه مختصاتی که انتخاب کرده‌ایم، داشته باشیم $\mathbf{d}(d_x, d_y, d_z)$ ، آن وقت

$$\text{Pr}_l^P(\mathbf{d}) = (0, 0, d_z)$$

و چون $\text{Pr}_p^l(\mathbf{d}) = (d_x, d_y, 0)$ ، بنا براین، برای هر بردار $\mathbf{d}$ داریم:

$$\text{Pr}_l^P(\mathbf{d}) + \text{Pr}_p^l(\mathbf{d}) = \mathbf{d} \quad (2.71)$$

عمل تصویر بردار برخط راست l به موازات صفحه P ، دارای ویژگی خطی است و برای بردارهای دلخواه $\mathbf{d}$ و $\mathbf{f}$ و هر دو عدد α و β داریم:

$$\text{Pr}_l^P(\alpha \mathbf{d} + \beta \mathbf{f}) = \alpha \text{Pr}_l^P(\mathbf{d}) + \beta \text{Pr}_l^P(\mathbf{f}) \quad (2.72)$$

مثال ۵.۷.۲. نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ و صفحه P به معادله

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

در يك دستگاه مختصات داده شده‌اند. معادله صفحه P^* را پیدا کنید که از نقطه M_0 موازی صفحه P رسم شده است.

حل. معادله هر صفحه P^* ، موازی با صفحه P ، به این صورت است:

$$Ax + By + Cz + D^* = 0$$

مقدار ثابت D^* را می‌توانیم، از این شرط که، نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ متعلق به صفحه P^* است، به دست آوریم:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D^* = 0 \iff D^* = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

و بنابراین، برای معادله صفحه P^* ، داریم:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

مثال ۶.۷.۲. در دستگاه مختصات مفروضی، خط راست l و صفحه P

داده شده‌اند:

$$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}; \quad P: 2x + y + z + 2 = 0$$

نقطه $M(1, 2, 3)$ را برخط راست l موازی صفحه P تصویر کرده‌ایم؛ مختصات تصویر آن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ را پیدا کنید.

حل. معادله صفحه‌ای که از نقطه M موازی با صفحه P رسم شود،

چنین است:

$$2(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0 \iff 2x + y + z - 7 = 0$$

(مثال قبل را ببینید). $M_* = \text{Pr}_I^P(M)$ ، نقطه برخورد این صفحه با خط راست l است و، بنابراین، مختصات آن، از دستگاه زیر به دست می آید:

$$2x_* + y_* + z_* - 7 = 0,$$

$$x_* - 1 = \frac{1}{2} y_*, \quad z_* + 1 = -\frac{1}{2} y_*.$$

و از آن جا: $x_* = 3, y_* = 4, z_* = -3$.

مثال ۷.۷.۲. نقطه‌های M, N, Q, K, L و R ، به ترتیب، وسط

یال‌های $[AD], [BD], [CD], [AC], [AB]$ و $[BC]$ از چهار وجهی $ABCD$ هستند. صفحه‌های $(CMB), (ANC), (AQB), (DKB), (DLC)$ و (DRA) را، به ترتیب، $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ و خط‌های راست $(AD), (BD), (CD), (AC), (AB)$ و (BC) را، به ترتیب، با l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 و l_6 نشان می‌دهیم. برای بردار دلخواه d ، بردار زیر را مشخص کنید:

$$\Gamma(d) = \text{Pr}_{l_1}^{P_1}(d) + \text{Pr}_{l_2}^{P_2}(d) + \text{Pr}_{l_3}^{P_3}(d) + \\ + \text{Pr}_{l_4}^{P_4}(d) + \text{Pr}_{l_5}^{P_5}(d) + \text{Pr}_{l_6}^{P_6}(d)$$

حل. بردارهای $a = \overrightarrow{DA}, b = \overrightarrow{DB}$ و $c = \overrightarrow{DC}$ ، یک پایه را در فضا

تشکیل می‌دهند. بردار d را، در رابطه با این پایه، می‌توان به صورت

$$d = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

نوشت. با توجه به ویژگی خطی عمل تصویر، داریم:

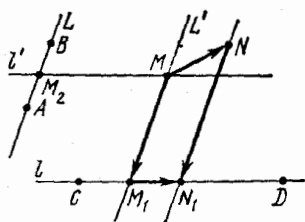
$$\Gamma(d) = \Gamma(\alpha a + \beta b + \gamma c) = \sum_{j=1}^6 \text{Pr}_{l_j}^{P_j}(\alpha a + \beta b + \gamma c) = \\ = \sum_{j=1}^6 \left(\alpha \text{Pr}_{l_j}^{P_j}(a) + \beta \text{Pr}_{l_j}^{P_j}(b) + \gamma \text{Pr}_{l_j}^{P_j}(c) \right) = \\ = \alpha \sum_{j=1}^6 \text{Pr}_{l_j}^{P_j}(a) + \beta \sum_{j=1}^6 \text{Pr}_{l_j}^{P_j}(b) + \gamma \sum_{j=1}^6 \text{Pr}_{l_j}^{P_j}(c) =$$

$$= \alpha \Gamma(a) + \beta \Gamma(b) + \gamma \Gamma(c)$$

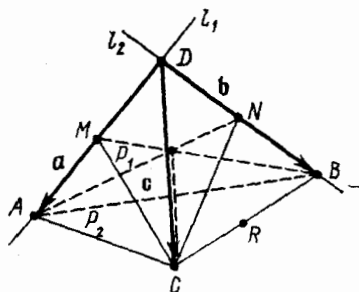
(مثال ۴.۷.۲ را ببینید). $\Gamma(a)$ را پیدا می‌کنیم. از آن‌جا که

$$\text{Pr}_{l_1}^{P_1}(A) = A, \text{Pr}_{l_1}^{P_1}(D) = D$$

بنابراین $\text{Pr}_{l_1}^{P_1}(a) = a$ (شکل ۳۳.۲). و چون



شکل ۳۴.۲



شکل ۳۳.۲

$$\text{Pr}_{l_2}^{P_2}(A) = N, \text{Pr}_{l_2}^{P_2}(D) = D$$

بنابراین $\text{Pr}_{l_2}^{P_2}(a) = \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}b$ و به همین ترتیب

$$\text{Pr}_{l_3}^{P_3}(a) = \frac{1}{3}c, \text{Pr}_{l_4}^{P_4}(a) = \frac{1}{3}(a-c), \text{Pr}_{l_5}^{P_5}(a) = \frac{1}{3}(a-b)$$

چون $\text{Pr}_{l_1}^{P_1}(A) = \text{Pr}_{l_1}^{P_1}(D) = R$ بنابراین

$$\text{Pr}_{l_1}^{P_1}(a) = RR = 0$$

و در نتیجه

$$\Gamma(a) = a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}(a-c) + \frac{1}{3}(a-b) + 0 = 2a$$

به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$\Gamma(b) = 2b, \quad \Gamma(c) = 2c$$

به این ترتیب، برای هر بردار d داریم:

$$\Gamma(d) = \alpha\Gamma(a) + \beta\Gamma(b) + \gamma\Gamma(c) = 2\alpha a + 2\beta b + 2\gamma c = 2d$$

دو خط راست غیر موازی l و L را در صفحه P در نظر می‌گیریم (شکل ۳۴.۲). تصویر $\text{Pr}_l^L(M)$ از نقطه $M \in P$ بر خط راست l به موازات L ، به عنوان نقطه‌ای مانند $M_1 \in l$ تعریف می‌کنند، به شرطی که بردار $\overrightarrow{MM_1}$ موازی L باشد. نقطه M_1 ، تنها نقطه‌ای است که از برخورد خط راست l با خط راستی که از M موازی L رسم می‌شود، به دست می‌آید. M و N را متعلق به صفحه P می‌گیریم. تصویر $\text{Pr}_l^L(\overrightarrow{MN})$ ، یعنی تصویر پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ بر خط راست l و موازی با L ، به عنوان پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{M_1N_1}$ تعریف می‌شود که، در آن،

$$M_1 = \text{Pr}_l^L(M), \quad N_1 = \text{Pr}_l^L(N)$$

اکنون، d را برداری موازی با صفحه P می‌گیریم. تصویر d بر خط راست l و موازی با خط راست L ، به عنوان تصویر پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ ، که معرف بردار d است، تعریف می‌شود، به نحوی که دو نقطه M و N ، ابتدا و انتهای پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ ، روی صفحه P باشد:

$$d^* = \text{Pr}_l^L(d) = \text{Pr}_l^L(\overrightarrow{MN})$$

روشن است که، این تعریف، مستقل از انتخاب پاره‌خط راست جهت‌داری است که بردار d را مشخص می‌کند. عمل تصویر کردن يك بردار بريك خط راست l ، موازی با خط راست L ، در صفحه، عملی خطی است، یعنی، برای هر دو بردار d و f و هر دو عدد α و β داریم:

$$\text{Pr}_l^L(\alpha d + \beta f) = \alpha \text{Pr}_l^L(d) + \beta \text{Pr}_l^L(f)$$

اتحاد زیر هم، همیشه برقرار است:

$$\mathbf{d} = \text{Pr}_l^L(\mathbf{d}) + \text{Pr}_L^L(\mathbf{d})$$

مثال ۸۰۷۰۲. تحقیق کنید، خط‌های راست

$$l: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{1}; \quad L: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

در يك صفحه واقع اند و باهم موازی نیستند. تصویر نقطه $M(0, -4, -7)$ را بر خط راست l و موازی خط راست L را پیدا کنید.

حل. خط‌های راست l و L موازی نیستند، چون بردارهای هادی

آنها $\mathbf{b} = (1, -3, 1)$ و $\mathbf{c} = (1, -1, 3)$ هم‌راستا نیستند:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ثابت می‌کنیم، این دو خط راست، یکدیگر را قطع می‌کنند (که در نتیجه، در صفحه قرار دارند). برای این منظور، ثابت می‌کنیم دستگاه معادله‌های

$$x-2 = \frac{y+2}{-3}, \quad z-3 = \frac{y+2}{-3},$$

$$x = -y+2, \quad z = -3(y-2)-1$$

دارای جواب است. از سه معادله اول به دست می‌آید: $x=1$, $y=1$, $z=2$. و به سادگی روشن می‌شود که، این مقادیرهای x و y و z ، در معادله چهارم دستگاه صدق می‌کند. به این ترتیب، خط‌های راست l و L ، در نقطه $N(1, 1, 2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

اکنون $\text{Pr}_l^L(M)$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، از نقطه مفروض $M(0, -4, -7)$ ، خط راستی موازی L رسم می‌کنیم. معادله این خط راست، چنین است:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+7}{3}$$

نقطه $\text{Pr}_l^L(M)$ ، در محل برخورد این خط راست با خط راست l قرار دارد

و، بنابراین، مختصات آن از دستگاه معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$x = -y - 4, \quad z + 7 = -3(y + 4), \quad x - 2 = -\frac{y+2}{3},$$

$$z - 3 = -\frac{y+2}{3}$$

این دستگاه متوافق است و جواب دارد: $x = 4, y = -8, z = 5$. در نتیجه، مختصات نقطه $\text{Pr}_l^L(M)$ عبارت است از $(4, -8, 5)$.

مثال ۹۰۷۰۲. چهار نقطه $A(1, 2), B(2, 5), C(1, -1)$ و $D(3, -7)$ در یک صفحه داده شده‌اند. $L = (AB)$ و $l = (CD)$ می‌گیریم. نقطه M را طوری پیدا کنید که، نقطه $M_1 = \text{Pr}_l^L(M)$ ، پاره‌خط راست $[CD]$ را به نسبت $1:3$ تقسیم کند، به شرطی که این نسبت را از طرف نقطه C به حساب آوریم و، در ضمن، نقطه $M_2 = \text{Pr}_L^l(M)$ ، وسط پاره‌خط راست $[AB]$ باشد.

حل. با توجه به دستورهای تقسیم پاره‌خط راست به نسبت مفروض، مختصات نقطه M_1 چنین است:

$$x_1 = \frac{x_C + \frac{1}{3}x_D}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \quad y_1 = \frac{(-1) + \frac{1}{3}(-7)}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{5}{2}$$

مختصات نقطه M_2 هم، $x_2 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{7}{2}$ می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم: $l' = (MM_2)$ و $L' = (MM_1)$ (شکل ۳۴۰۲). بنا بر تعریف تصویر L و L' و l و l' ، در نتیجه، $\vec{AB} = (1, 3)$ ، بردارهای خط راست L' است که از نقطه $M_1(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ می‌گذرد. بنابراین، معادله خط راست L' چنین است:

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{1} = \frac{y + \frac{5}{2}}{3} \iff 3x - y - 7 = 0$$

بردار هادی خط راست l' عبارت است از $\vec{CD} = (2, -6)$ ، $M_7 \in l'$ به این ترتیب، معادله l' چنین می‌شود:

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{2} = \frac{y - \frac{7}{2}}{-6} \iff 3x + y - 8 = 0$$

مختصات نقطه M ، از حل دستگاه معادله‌های

$$3x - y - 7 = 0, \quad 3x + y - 8 = 0$$

به دست می‌آید: $M\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ که همان نقطه برخورد l' و L' است.

بخش ۸.۲. مثال‌های مختلف

مثال ۸.۲.۱. مثلث ABC مفروض است. نقطه M را طوری پیدا

کنید که، برای آن، داشته باشیم:

$$\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{AB}$$

حل. از آن‌جا که

$$\vec{MA} = -\vec{AM}, \quad \vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM}, \quad \vec{MC} = \vec{AC} - \vec{AM}$$

به دست می‌آید:

$$(-\vec{AM}) + (\vec{AB} - \vec{AM}) - 3(\vec{AC} - \vec{AM}) = \vec{AB}$$

و یا $\vec{AM} = 3\vec{AC}$. نقطه M در امتداد ضلع $[AC]$ (از طرف نقطه C) قرار دارد و $|AM| = 3|AC|$.

مثال ۸.۲.۲. ثابت کنید، برای هر مجموعه متناهی از نقطه‌های

$A_1, A_2, \dots, A_n$ (در فضا یا در صفحه)، نقطه منحصر به فردی مانند M

وجود دارد، به نحوی که

$$\vec{MA}_1 + \vec{MA}_2 + \dots + \vec{MA}_n = \vec{0}$$

جای نقطه M را در هر يك از حالت‌های خاص زیر پیدا کنید:

(۱) يك مثلث است؛ $A_1 A_2 A_3$

(۲) يك چهارضلعی در فضا یا در صفحه است؛ $A_1 A_2 A_3 A_4$

(۳) يك n ضلعی منتظم در صفحه است. $A_1 A_2 \dots A_n$

حل. نقطه‌ای مثل O را به عنوان قطب در نظر می‌گیریم. برای هر نقطه

M داریم:

$$\begin{aligned} \vec{MA}_1 + \vec{MA}_2 + \dots + \vec{MA}_n &= (\vec{OA}_1 - \vec{OM}) + (\vec{OA}_2 - \vec{OM}) + \\ &+ \dots + (\vec{OA}_n - \vec{OM}) = (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n) - n\vec{OM} \end{aligned}$$

از این‌جا روشن می‌شود که، نقطه M ، تنها وقتی با شرط مسأله سازگار است که داشته باشیم:

$$\vec{OM} = \frac{1}{n}(\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n) \quad (2.73)$$

یعنی، نقطه M ، انتهای بردار $\frac{1}{n}(\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n)$ است، به شرطی که ابتدای آن را، نقطه O به حساب آوریم. نقطه M همواره وجود دارد و منحصر به فرد است.

(۱) در حالت مثلث $A_1 A_2 A_3$ داریم:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3)$$

اگر نقطه A_1 را به عنوان قطب در نظر بگیریم، به دست می‌آید:

$$\vec{A_1 M} = \frac{1}{3}(\vec{A_1 A_1} + \vec{A_1 A_2} + \vec{A_1 A_3}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{A_1 A_2} + \vec{A_1 A_3}}{2}$$

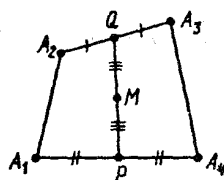
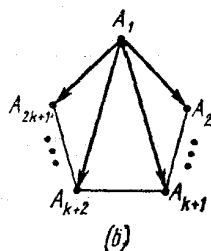
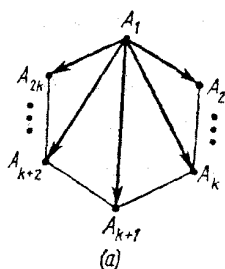
یعنی، نقطه M ، بر میانه‌ای از مثلث $A_1 A_2 A_3$ قرار دارد که از رأس A_1

رسم شده باشد و، آن را، از سمت A_1 ، به نسبت $۲:۱$ تقسیم می‌کند. اگر به جای A_1 ، یکی از دو نقطه A_2 یا A_3 را به عنوان قطب انتخاب می‌کردیم، آن وقت، نقطه M ، روی میانه وارد از رأس A_2 یا A_3 قرار می‌گرفت و آن را به نسبت $۲:۱$ تقسیم می‌کرد. از این‌جا نتیجه می‌شود که، میانه‌های هر مثلث، در یک نقطه (مرکز ثقل مثلث) به هم می‌رسند و مجموع سه برداری که مبدأ آن‌ها، مرکز ثقل، و انتهای آن‌ها، سه رأس مثلث باشند، برابر صفر است. در ضمن، این نقطه، هر یک از میانه‌ها را به نسبت $۲:۱$ تقسیم می‌کند. شعاع حامل مرکز ثقل M در مثلث $A_1A_2A_3$ ، متناظر با قطب O ، به کمک دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3})$$

(۲) در حالت چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ داریم:

$$\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4})$$



شکل ۳۵-۲

شکل ۳۶-۲

P و Q را وسط ضلع‌های $[A_1A_4]$ و $[A_2A_3]$ می‌گیریم. (شکل ۳۵-۲).
نقطه A_1 را به جای قطب فرض می‌کنیم؛ داریم:

$$\begin{aligned}
 \vec{A_1 M} &= \frac{1}{4}(\vec{A_1 A_2} + \vec{A_1 A_3} + \vec{A_1 A_4}) = \\
 &= \frac{1}{4}[\vec{A_1 A_2} + (\vec{A_1 A_4} + \vec{A_4 A_3}) + \vec{A_1 A_4}] = \\
 &= \frac{1}{2}\vec{A_1 A_4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{A_1 A_2} + \vec{A_4 A_3}}{2}\right) = \vec{A_1 P} + \frac{1}{2}\vec{PQ}
 \end{aligned}$$

(در این جا، از برابری $\vec{PQ} = \frac{\vec{A_1 A_2} + \vec{A_4 A_3}}{2}$ استفاده کرده‌ایم؛ مثال

۵.۲.۲ را ببینید). به این ترتیب، نقطه M ، بر پاره‌خط راستی قرار دارد که وسط دو پاره‌خط راست $[A_2 A_3]$ و $[A_1 A_4]$ را به هم وصل و، درضمن، آن را نصف می‌کند.

نتیجه. در هر چهار وجهی، پاره‌خط‌های راست واصل بین نقطه‌های وسط یال‌های متناظر، در نقطه‌ای مثل M مشترک‌اند و، در آن جا، یکدیگر را نصف می‌کنند. مجموع بردارهای به مبداء M و انتهای هر یک از رأس‌های چهاروجهی، برابر صفر است.

(۳) در حالت n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ داریم:

$$\vec{OM} = \frac{1}{n}(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n})$$

A_1 را قطب می‌گیریم. اگر n عددی زوج باشد ($n = 2k$)، آن وقت، بردارهای

$\vec{A_1 A_2} + \vec{A_1 A_{2k}}, \vec{A_1 A_3} + \vec{A_1 A_{2k-1}}, \dots, \vec{A_1 A_k} + \vec{A_1 A_{k+2}}, \vec{A_1 A_{k+1}}$ با نیمساز زاویه $A_2 A_1 A_{2k}$ هم‌جهت‌اند (شکل ۳۶.۲-ا). اگر n عددی فرد باشد ($n = 2k + 1$)، آن وقت بردارهای

$\vec{A_1 A_2} + \vec{A_1 A_{2k+1}}, \vec{A_1 A_3} + \vec{A_1 A_{2k}}, \dots, \vec{A_1 A_{k+1}} + \vec{A_1 A_{k+2}}$ با نیمساز زاویه $A_2 A_1 A_{2k+1}$ هم‌جهت‌اند (شکل ۳۶.۲-ب). در هر دو

حالت، بردار

$$\vec{A_1M} = \frac{1}{n}[(\vec{A_1A_2} + \vec{A_1A_n}) + (\vec{A_1A_3} + \vec{A_1A_{n-1}}) + \dots]$$

دارای همان جهت است (یعنی در جهت نیمساز زاویه $A_2A_1A_n$ قرار دارد). به این ترتیب، نقطه M در امتداد نیمساز $A_2A_1A_n$ واقع است. اگر نقطه A_2 به عنوان قطب انتخاب شود، در این صورت نقطه M ، بر نیمساز زاویه $A_1A_2A_3$ هم قرار می گیرد و، در نتیجه، M بر مرکز چندضلعی منطبق می شود: مجموع بردارهای به مبدا M (مرکز چندضلعی منتظم) و انتهای هر يك از رأس ها، برابر صفر است.

مثال ۳۰۸۰۲. ثابت کنید، در هر چهاروجهی، پاره خط های راستی که رأس ها را به مرکز ثقل وجه های مقابل وصل می کنند، در يك نقطه به هم می رسند و، این نقطه، هر يك از این پاره خط های راست را، از طرف رأس، به نسبت ۱:۳ تقسیم می کند.

حل. چهار رأس چهار وجهی را A, B, C, D می نامیم. فرض می کنیم:

$$\vec{a} = \vec{DA}, \quad \vec{b} = \vec{DB}, \quad \vec{c} = \vec{DC}$$

Q را مرکز ثقل وجه ACD ، و M را نقطه ای از پاره خط راست $[QB]$ می گیریم، به نحوی که آن را به نسبت ۱:۳ تقسیم کرده باشد (شکل ۳۷۰۲). بنابر دستور مثال قبل

$$\begin{aligned} \vec{BQ} &= \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BD} + \vec{BC}) = \frac{1}{3}[(\vec{a} - \vec{b}) + (-\vec{b}) + (\vec{c} - \vec{b})] = \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{c}}{3} - \vec{b} \end{aligned}$$

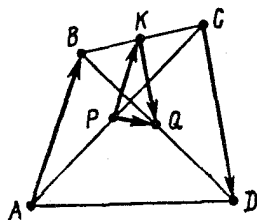
و از آن جا

$$\vec{BM} = \frac{3}{4}\left(\frac{\vec{a} + \vec{c}}{3} - \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{4} - \frac{3}{4}\vec{b},$$

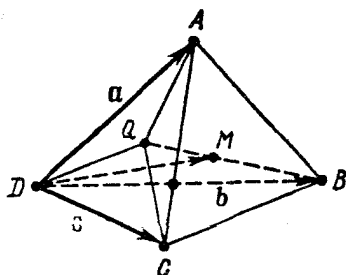
$$\begin{aligned}\vec{DM} &= \vec{DB} + \vec{BM} = \mathbf{b} + \left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{4} - \frac{3}{4}\mathbf{b} \right) = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4} = \\ &= \frac{1}{4}(\vec{DD} + \vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC})\end{aligned}$$

یعنی برای نقطه M داریم (مثال ۲.۸.۲، بخش ۲) را ببینید):

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \mathbf{0} \quad (2.74)$$



شکل ۲.۸.۲



شکل ۲.۷.۲

نقطه M ، در چهاروجهی $ABCD$ ، بر پاره‌خط راستی قرار دارد که رأس B را به مرکز ثقل Q از وجه مقابل وصل می‌کند و این پاره‌خط راست را به نسبت $۱:۳$ ، از طرف رأس، تقسیم می‌کند. اگر در مورد رأس‌های C ، D یا A هم، به همین ترتیب استدلال کنیم، به ایسن نتیجه می‌رسیم که نقطه M [که در رابطه (۲.۷۴) صدق می‌کند]، روی هر یک از پاره‌خط‌های راستی قرار دارد که این رأس‌ها را به مرکز ثقل وجه روبه‌رو وصل می‌کنند و، در ضمن، هر کدام از این پاره‌خط‌های راست را، به نسبت $۱:۳$ تقسیم می‌کند. مثال ۲.۸.۴. چهار نقطه متمایز A ، B ، C و D در فضا داده شده‌اند. وسط پاره‌خط‌های راست $[AC]$ و $[BD]$ را، به ترتیب، P و Q می‌نامیم.

ثابت کنید:

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$$

حل. K را وسط $[BC]$ می گیریم (شکل ۳۸.۲). $[PK]$ وسط دو

ضلع مثلث ABC را به هم وصل کرده است، بنابراین $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. به همین

ترتیب: $\overrightarrow{KQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. در نتیجه

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$$

مثال ۵.۸۰.۲. A, B, C, D, E, F, G, H نقطه‌هایی از فضا یا

صفحه، و نقطه‌های $M, N, P, Q, M', N', P', Q', R, S, R', S'$ به

ترتیب، وسط پاره‌خط‌های راست $[AB]$ ، $[CD]$ ، $[BC]$ ، $[DE]$ ، $[AH]$ ،

$[GF]$ ، $[HG]$ ، $[FE]$ ، $[MN]$ ، $[PQ]$ ، $[M'N']$ ، $[P'Q']$ هستند (شکل

۳۹.۲). ثابت کنید:

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R'S'}$$

حل. با توجه به ویژگی خط میانه در چهارضلعی فضائی (مثال ۵.۲۰.۲

را ببینید)، داریم:

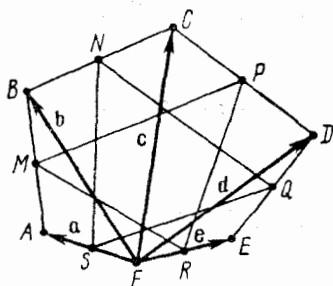
$$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}), \quad \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}, \quad \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE})$$

بنابراین:

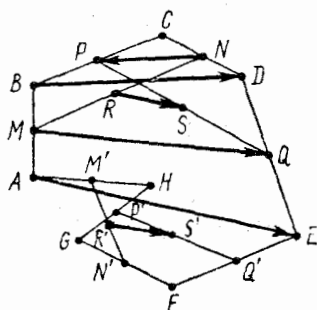
$$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{R'S'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{N'P'} + \overrightarrow{M'Q'}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{FH} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AE})\right] = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$$



شکل ۳۹.۲



شکل ۴۰.۲

مثال ۳۰.۸.۲. در شش ضلعی محدب $ABCDEF$ ، وسط ضلع‌ها را، يك درمیان، به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه برخورد میانه‌ها، در دو مثلی که به این ترتیب به دست می‌آیند، برهم منطبق‌اند.

حل. وسط ضلع‌های $[FA]$ ، $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[DE]$ ، $[EF]$

را به ترتیب S ، M ، N ، P ، Q ، R می‌نامیم و قرار می‌گذاریم:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{FA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{FB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{FC}, \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{FD}, \quad \mathbf{e} = \overrightarrow{FE}$$

(شکل ۴۰.۲). نقطه F ، رأس شش ضلعی را، به عنوان قطب انتخاب می‌کنیم و مرکز ثقل مثلث‌های MPR و SRQ را، به ترتیب، K و L می‌نامیم و بردارهای حامل نقطه‌های K و L را نسبت به قطب پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad \overrightarrow{FP} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}), \quad \overrightarrow{FR} = \frac{1}{2}\mathbf{e}, \quad \overrightarrow{FS} = \frac{1}{2}\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{FN} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \overrightarrow{FQ} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{e})$$

و با توجه به مثال ۲۰.۸.۲ خواهیم داشت:

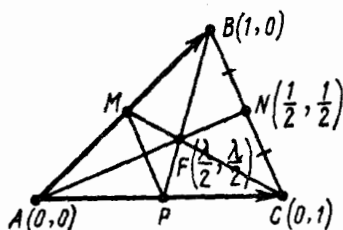
$$\begin{aligned}\vec{FK} &= \frac{1}{3}(\vec{FM} + \vec{FP} + \vec{FR}) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) + \frac{1}{2}\mathbf{e} \right] = \frac{1}{6}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}); \\ \vec{FL} &= \frac{1}{3}(\vec{FS} + \vec{FN} + \vec{FQ}) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{e}) \right] = \frac{1}{6}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e})\end{aligned}$$

یعنی $\vec{FL} = \vec{FK}$.

مثال ۷.۸.۲. $[AN]$ میانه وارد از رأس A در مثل مفروض ABC است. از نقطه دلخواه F واقع بر پاره خط راست $[AN]$ ، خط‌های راست (CF) و (BF) را رسم کرده‌ایم تا ضلع‌های $[AB]$ و $[AC]$ را، به ترتیب، در نقطه‌های M و P قطع کنند. ثابت کنید، چهارضلعی $CPMB$ ، تنها وقتی دوزنقه است که داشته باشیم: $F \neq N$ و $F \neq A$.

حل. دستگاه مختصات $\{A, \vec{AB}, \vec{AC}\}$

را در نظر می‌گیریم (شکل ۴۱.۲). در این دستگاه مختصات، داریم:



شکل ۴۱.۲

$$A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1),$$

$$N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \vec{AN} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

نقطه F بر پاره خط راست $[AN]$ قرار دارد و $F \neq N$ و $F \neq A$. بنابراین، به ازای مقداری از $\lambda \in (0, 1)$ ، داریم:

$$\vec{AF} = \lambda \vec{AN} \quad \text{و} \quad F\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$$

معادله خط‌های راست (BF) ، (CM) ، (AC) و (AB) چنین است:

$$(BF): \frac{x-1}{\lambda} = \frac{y-0}{\lambda} \iff \lambda x - (\lambda-2)y - \lambda = 0;$$

$$(CM): \frac{x-0}{\lambda} = \frac{y-1}{\lambda} \iff (\lambda-2)x - \lambda y + \lambda = 0;$$

$$(AC): x=0; (AB): y=0$$

و مختصات نقطه $P = (BF) \cap (AC)$ از دستگاه معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$\lambda x - (\lambda-2)y - \lambda = 0, \quad x=0$$

که از آن جا به دست می‌آید: $P(0, \frac{\lambda}{2-\lambda})$. به همین ترتیب $M(\frac{\lambda}{2-\lambda}, 0)$. بنابراین $\vec{MP} = (-\frac{\lambda}{2-\lambda}, \frac{\lambda}{2-\lambda})$ چون $\vec{BC} = (-1, 1)$ بنابراین

$$\vec{MP} = \frac{\lambda}{2-\lambda} \vec{BC}, \Rightarrow (MP) \parallel (BC), \quad |MP| \neq |BC|$$

یعنی چهارضلعی $CPMB$ دوزنقه است.

مثال ۰.۸.۸.۲* مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این که سه خط

راست

$$l_i: A_i x + B_i y + C_i = 0, \quad A_i^2 + B_i^2 > 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

دارای نقطه مشترکی در صفحه باشند.

حل. سه خط راست l_1, l_2 و l_3 ، تنها وقتی يك نقطه مشترك دارند که

عددهای x_0 و y_0 (مختصات نقطه مشترك) وجود داشته باشند، به نحوی که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$C_1 = -x_0 A_1 - y_0 B_1, \quad C_2 = -x_0 A_2 - y_0 B_2,$$

$$C_3 = -x_0 A_3 - y_0 B_3 \quad (2.75)$$

اگر با در نظر گرفتن پایه‌ای در فضا، بردارهای

$$\mathbf{a} = (A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{b} = (B_1, B_2, B_3), \quad \mathbf{c} = (C_1, C_2, C_3)$$

را مشخص کنیم، آن وقت، شرط (۲.۷۵) به این معناست که می‌توان، بردار $\mathbf{c}$ را، بر حسب بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بیان کرد. به این ترتیب، اگر خط‌های راست l_1, l_2, l_3 نقطهٔ مشترکی داشته باشند، آن وقت، بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه‌اند:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.76)$$

شرط (۲.۷۶)، شرط لازم است برای آن که خط‌های راست l_1, l_2 و l_3 در يك نقطه مشترك باشند.

ثابت می‌کنیم، همین شرط، کافی هم هست. اگر بردارهای

$$\mathbf{a} = (A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{b} = (B_1, B_2, B_3)$$

هم‌راستا نباشند، شرط (۲.۷۶) نشان می‌دهد که، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ ، هم‌صفحه‌اند و بردار $\mathbf{c}$ موازی با صفحه‌ای است که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در آن، تشکیل پایه می‌دهند. با توجه به دستور (۲.۳۸)، شرط (۲.۷۵)، برای مقداری از x_0 و y_0 برقرار است. ولی اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا باشند، آن وقت یا

$$b \neq 0, \quad \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} : A_1 = \lambda B_1, \quad A_2 = \lambda B_2, \quad A_3 = \lambda B_3$$

و شرط (۲.۷۵) به این صورت درمی‌آید:

$$C_1 = -(\lambda x_0 + y_0) B_1, \quad C_2 = -(\lambda x_0 + y_0) B_2,$$

$$C_3 = -(\lambda x_0 + y_0) B_3$$

یعنی $\mathbf{c} = -(\lambda x_0 + y_0) \mathbf{b}$ و یا

$$\mathbf{a} \neq 0, \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{a} : B_i = \mu A_i (i = 1, 2, 3)$$

و شرط (۲.۷۵) به صورت $c = -(x_0 + \mu y_0)a$ درمی‌آید.
بنابراین، شرط لازم و کافی، برای این که سه خط راست

$$l_i: A_i x + B_i y + C_i = 0, \quad A_i^2 + B_i^2 > 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

نقطهٔ مشترکی داشته باشند، عبارت است از

$$\Delta = 0 \text{ یا } a \parallel b \text{ یا } a \parallel b \parallel c \quad (2.77)$$

اگر $\Delta = 0$ و $a \parallel b$ ، آن وقت l_1, l_2 و l_3 تنها يك نقطهٔ مشترك دارند [بردار c (با ضریب‌های $-x_0$ و $-y_0$)، نسبت به پایهٔ $\{a, b\}$ به صورتی منحصر به فرد، قابل بیان است]. اگر $\Delta = 0$ و a و b هم راستا باشند، آن وقت، بیان (۲.۷۵) منحصر به فرد نیست [اگر $a = \lambda b, b \neq 0$ و $c = \lambda' b$ ، آن گاه رابطه‌های (۲.۷۵)، برای مقادارهای دلخواه x_0 و y_0 که در رابطهٔ $\lambda x_0 + y_0 = -\lambda'$ صدق کنند، برقرارند؛ و اگر $a \neq 0$ و $b = \mu a$ ، آن وقت برابری‌های (۲.۷۵) برای همهٔ مقادارهایی از x_0 و y_0 برقرارند که با رابطهٔ $x_0 + \mu y_0 = -\mu'$ سازگار باشند].

به این ترتیب، اگر $\Delta = 0$ و $a \parallel b$ ، خط‌های راست l_1, l_2 و l_3 در يك نقطهٔ منحصر، مشترك‌اند؛ و اگر $\Delta = 0$ و $a \parallel b \parallel c$ ، سه خط راست l_1, l_2 و l_3 برهم منطبق‌اند.

مثال ۲.۹.۸.۰* نقطه‌های $M \in (AB)$ ، $N \in (BC)$ و $P \in (CA)$ روی ضلع‌ها، یا امتداد ضلع‌های مثلث ABC انتخاب شده‌اند، به نحوی که

$$\vec{AM} = \alpha \vec{AB}, \quad \vec{BN} = \beta \vec{BC}, \quad \vec{CP} = \gamma \vec{CA}$$

ثابت کنید، شرط لازم و کافی برای این که خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) در يك نقطه مشترك و یا دوبه‌دو موازی باشند، این است که

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = \alpha\beta\gamma \quad (2.78)$$

حل. دستگاه مختصات $\{\vec{A}, \vec{AC}, \vec{AB}\}$ را در نظر می‌گیریم. در این

دستگاه

$$A(0, 0), \quad B(0, 1), \quad C(1, 0), \quad M(0, \alpha),$$

$$N(\beta, 1-\beta), P(1-\gamma, 0)$$

و معادله خط‌های راست چنین‌اند:

$$(AN): \frac{x-0}{\beta-0} = \frac{y-0}{(1-\beta)-0} \iff (1-\beta)x - \beta y = 0;$$

$$(BP): \frac{z-0}{(1-\gamma)-0} = \frac{y-1}{0-1} \iff x + (1-\gamma)y - (1-\gamma) = 0;$$

$$(CM): \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{\alpha-0} \iff \alpha x + y - \alpha = 0$$

شرط لازم، برای این‌که این سه خط راست نقطهٔ مشترك داشته باشند، چنین است [(۲.۷۶) را ببینید]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\beta & -\beta & 0 \\ 1 & 1-\gamma & -(1-\gamma) \\ \alpha & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 0 = (1-\beta) \begin{vmatrix} 1-\gamma & -(1-\gamma) \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} - (-\beta) \begin{vmatrix} 1 & -(1-\gamma) \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix} = \\ = (1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

[(۲.۷۸) را ببینید]. اگر $(AN) \parallel (BP)$ ، آن وقت، بردارهای هادی

$$\mathbf{n} = (\beta, 1-\beta), \mathbf{p} = (1-\gamma, -1)$$

این خط‌های راست، هم‌راستا هستند؛ و بنابر ویژگی هم‌راستایی بردارها:

$$(AN) \parallel (BP) \iff \begin{vmatrix} \beta & 1-\beta \\ 1-\gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \beta = -(1-\beta)(1-\gamma) \quad (2.79)$$

e] برداری می‌گیریم که باصفحهٔ (ABC) موازی نباشد، در این صورت،

در پایه $\{\vec{AC}, \vec{AB}, e\}$ داریم:

$$n = (\beta, 1 - \beta, 0), \quad p = (1 - \gamma, -1, 0)$$

و رابطه (۲.۷۹)، به سادگی از رابطه (۲.۳۵). به همین ترتیب، اگر $(BP) \parallel (CM)$ ، آن وقت $p \parallel m$ و

$$p = (1 - \gamma, -1), \quad m = (-1, \alpha)$$

یعنی

$$(BP) \parallel (CM) \iff \begin{vmatrix} 1 - \gamma & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha\gamma = -(1 - \alpha) \quad (2.80)$$

اکنون، اگر خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) دو به دو موازی باشند، از رابطه‌های (۲.۷۹) و (۲.۸۰) به دست می‌آید:

$$\alpha\beta\gamma = (1 - \beta)(1 - \gamma)(1 - \alpha)$$

یعنی رابطه (۲.۷۸)، شرط لازم برای موازی بودن خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) است.

حالا ثابت می‌کنیم، شرط (۲.۷۸)، کافی است. اگر این شرط برقرار

باشد، ولی بردارهای سه بعدی $a = (1 - \beta, 1, \alpha)$ و $b = (-\beta, 1 - \gamma, 1)$ هم راستا نباشند، آن گاه بنا بر نتیجه مثال ۸.۸.۲، خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) ، نقطه مشترک منحصر به فردی دارند.

فرض کنید، رابطه (۲.۷۸) برقرار، و بردارهای a و b هم راستا باشند:

$$\begin{vmatrix} 1 - \beta & 1 \\ -\beta & 1 - \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \beta & \alpha \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 - \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی $1 = \alpha(1 - \gamma)$ ، $1 = \beta(1 - \alpha)$ ، $1 = \gamma(1 - \beta)$ یا

$$\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \beta = \frac{1}{1 - \alpha}, \gamma = -\frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (2.81)$$

مقدارهای β و γ را به جای ضریب، در معادله‌های خط‌های راست قرار می‌دهیم، این معادله‌ها، به صورت زیر درمی‌آیند:

$(AN): \alpha x + y = 0$; $(BP): \alpha x + y = 1$; $(CM): \alpha x + y = \alpha$
 که دو به دو ناسازگارند، یعنی خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) ، دو به دو موازی‌اند.

اگر خط‌های راست مثال ۲.۸.۲ در نقطه‌ای متقاطع باشند، آن وقت، شعاع حامل $\mathbf{r}$ این نقطه برخورد، نسبت به هر قطب O ، بر حسب شعاع‌های $\mathbf{r}_A = \vec{OA}$ ، $\mathbf{r}_B = \vec{OB}$ ، $\mathbf{r}_C = \vec{OC}$ از دستور زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{r} = \frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}\mathbf{r}_A + \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}\mathbf{r}_B + \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)}\mathbf{r}_C \quad (2.82)$$

مثال ۲.۸.۲.۱۰. دستور (۲.۸۲) را ثابت کنید.

حل. فرض می‌کنیم، خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) ، در نقطه $Q(x, y)$ متقاطع باشند [که در نتیجه، برابری (۲.۷۸) برقرار است] و، در ضمن $\alpha(1-\gamma) \neq 1$ [را ببینید]. در این صورت (x, y) ، جواب دستگاه معادله‌های زیر است:

$$x + (1-\gamma)y = 1-\gamma; \quad \alpha x + y = \alpha$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$x = \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}, \quad y = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \vec{OQ} &= \vec{OA} + \vec{AQ} = \vec{OA} + x\vec{AC} + y\vec{AB} = \mathbf{r}_A + x(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) + \\ &+ y(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = (1-x-y)\mathbf{r}_A + y\mathbf{r}_B + x\mathbf{r}_C \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
 1-x-y &= \frac{1-\alpha(1-\gamma)-(1-\gamma)(1-\alpha)-\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)} = \\
 &= \frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}; \quad x = \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)} = \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{\alpha\gamma+(1-\alpha)} = \\
 &= \frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta} + (1-\alpha)} = \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)}; \\
 y &= \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)} = \frac{\alpha\gamma}{(1-\alpha)(1-\gamma)+\gamma} = \\
 &= \frac{\alpha\gamma}{\frac{\alpha\beta\gamma}{1-\beta} + \gamma} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}
 \end{aligned}$$

که دستور (۲۰.۸۲) را ثابت می‌کنند.

مثال ۲۰.۸۰.۱ با استفاده از نتیجه مثال ۲۰.۸۰.۲، ثابت کنید در هر مثلث، خط‌های راست زیر، در یک نقطه به هم می‌رسند: a (میان‌ها؛ b) نیم‌سازها؛ c (ارتفاع‌ها؛ d) خط‌های راستی که از رأس‌ها می‌گذرند و محیط مثلث را نصف می‌کنند؛ e خط‌های راستی که رأس‌ها را به نقطه‌های تماس ضلع‌های دایره محاطی داخلی وصل می‌کنند.

حل. $|AB|=c$ ، $|AC|=b$ و $|BC|=a$ می‌گیریم (شکل ۲۲.۲).

a بنا به تعریف، نقطه‌های M ،

N و P تنها وقتی پای میان‌ها

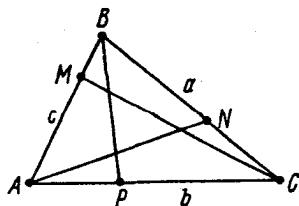
$[CM]$ ، $[AN]$ و $[BP]$ هستند که

داشته باشیم: $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$.

در این صورت داریم:

$$(1-\alpha) = (1-\beta) =$$

$$= (1-\gamma) = \frac{1}{2}$$



و در نتیجه $\frac{1}{\lambda} = \alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$. شرط (۲.۷۸) برقرار

است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا $\frac{1}{4} \neq \beta(1-\alpha)$.

بنابراین، میانه‌های مثلث، در يك نقطه به هم می‌رسند. بنا به دستور (۲.۸۲)، شعاع حامل r_1 این نقطه، برابر است با

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} r_A + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} r_B + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} r_C = \\ &= \frac{1}{3} (r_A + r_B + r_C) \end{aligned}$$

(b) اگر $[AN]$ ، $[BP]$ و $[CM]$ نیمسازهای زاویه‌های مثلث ABC باشند، با توجه به ویژگی نیمسازها (مثال ۱۰.۳.۲ را ببینید)، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{b}{a+b}, \quad 1-\alpha = \frac{a}{a+b}, \quad \beta = \frac{c}{b+c}, \quad 1-\beta = \frac{b}{b+c}, \\ \gamma &= \frac{a}{a+c}, \quad 1-\gamma = \frac{c}{a+c} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

یعنی شرط (۲.۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا

$$\beta(1-\alpha) = \frac{ac}{(a+b)(b+c)} < 1$$

در نتیجه، نیمسازهای زاویه‌های مثلث، در يك نقطه به هم می‌رسند. بنا به دستور

(۲.۸۲)، شعاع حامل r_P ، برای این نقطه، چنین است:

$$r_P = \frac{\frac{a}{a+c} \cdot \frac{a}{a+b}}{1 - \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{a+c}} r_A + \frac{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{b+c}}{1 - \frac{c}{b+c} \cdot \frac{a}{a+b}} r_B +$$

$$+ \frac{\frac{c}{b+c} \cdot \frac{c}{a+c}}{1 - \frac{a}{a+c} \cdot \frac{b}{b+c}} r_C = \frac{ar_A + br_B + cr_C}{a+b+c}$$

(c) اگر $[AN]$ ، $[BP]$ و $[CM]$ ارتفاع‌های مثلث ABC باشند، به شرط حاده یا قائمه بودن زاویه A داریم:

$$\alpha = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AC| \cos \hat{A}}{|AB|} = \frac{b}{c} \cos \hat{A} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \cos \hat{A}$$

و اگر زاویه A منفرجه باشد (شکل ۴۳.۲):

$$\alpha = -\frac{|AM|}{|AB|} = -\frac{|AC|}{|AB|} \cos (180^\circ - \hat{A}) = \frac{b}{c} \cos \hat{A} =$$

$$= \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \cos \hat{A}$$

یعنی در همه حالت‌ها: $\alpha = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \cos \hat{A}$. به این ترتیب

$$1 - \alpha = \frac{a}{c} \cos \hat{B} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} \cos \hat{B}; \quad \beta = \frac{c}{a} \cos \hat{B} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} \cos \hat{B};$$

$$1 - \beta = \frac{b}{a} \cos \hat{C} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} \cos \hat{C}; \quad \gamma = \frac{a}{b} \cos \hat{C} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} \cos \hat{C};$$

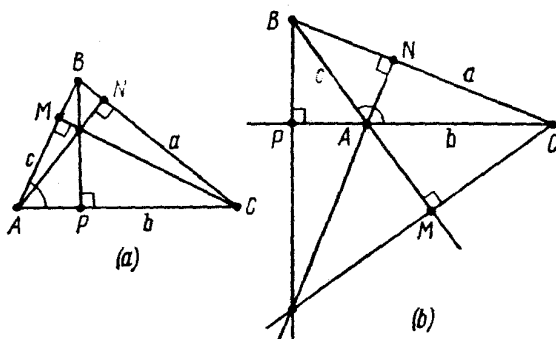
$$1 - \gamma = \frac{c}{b} \cos \hat{A} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \cos \hat{A}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) &= \frac{a}{c} \cos \hat{B} \cdot \frac{b}{a} \cos \hat{C} \cdot \frac{c}{b} \cos \hat{A} = \\ &= \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} = \alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

و شرط (۲.۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا

$$\beta(1-\alpha) = \cos^2 \hat{B} < 1$$



شکل ۴۳.۲

به این ترتیب، ارتفاع‌های مثلث، در يك نقطه به هم می‌رسند. شعاع حامل r_p ، برای این نقطه، با توجه به‌دستور (۲.۸۲) چنین می‌شود:

$$\begin{aligned}r_p &= \frac{\frac{\sin^2 \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C}}{\sin \hat{B} \sin \hat{C}}}{1 - \frac{b}{c} \cos \hat{A} \frac{c}{b} \cos \hat{A}} r_A + \frac{\frac{\sin^2 \hat{B} \cos \hat{A} \cos \hat{C}}{\sin \hat{A} \sin \hat{C}}}{1 - \frac{c}{a} \cos \hat{B} \frac{a}{c} \cos \hat{B}} r_B +\end{aligned}$$

$$+ \frac{\frac{\sin \hat{C} \cos \hat{B} \cos \hat{A}}{\sin \hat{B} \sin \hat{A}}}{1 - \frac{a}{b} \cos \hat{C} \frac{b}{a} \cos \hat{C}} \mathbf{r}_C =$$

$$= \cotg \hat{B} \cotg \hat{C} \cdot \mathbf{r}_A + \cotg \hat{C} \cotg \hat{A} \cdot \mathbf{r}_B + \cotg \hat{A} \cotg \hat{B} \cdot \mathbf{r}_C$$

(d) اگر در مثال ۲.۸.۹، نقطه‌های M ، N و P طوری باشند که هر کدام از خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) ، محیط مثلث را نصف کنند، اگر فرض کنیم $p = a + b + c$ ، آن وقت

$$|AC| + |AM| = p, \quad \alpha = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{p-b}{c} > 0.$$

(نقطه M بر پاره‌خط راست $[AB]$ قرار دارد) و به همین ترتیب

$$1 - \alpha = \frac{p-a}{c}, \quad \beta = \frac{p-c}{a}, \quad 1 - \beta = \frac{p-b}{a},$$

$$\gamma = \frac{p-a}{b}, \quad 1 - \gamma = \frac{p-c}{b}$$

و بنابراین:

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = \frac{p-a}{c} \cdot \frac{p-b}{a} \cdot \frac{p-c}{b} = \alpha\beta\gamma$$

و شرط (۲.۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا:

$$\begin{aligned} \beta(1 - \alpha) &= \frac{p-c}{a} \cdot \frac{p-a}{c} = \frac{ac - p(a+c-p)}{ac} = \\ &= 1 - \frac{p(p-b)}{ac} < 1 \end{aligned}$$

به این ترتیب، خط‌های راست مفروض، در یک نقطه به هم می‌رسند. با استفاده از اتحاد‌های

$$\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)} = \frac{(p-a)^2}{bc-(p-b)(p-c)} = \frac{(p-a)^2}{p(b+c-p)} =$$

$$= \frac{(p-a)^2}{p(2p-a-p)} = \frac{p-a}{p},$$

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)} = \frac{(p-b)^2}{ac-(p-c)(p-a)} = \frac{p-b}{p},$$

$$\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)} = \frac{p-c}{p}$$

می‌توان شعاع حامل r_F را برای نقطه مشترک خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) ، با توجه به دستور (۲.۸۲) به دست آورد:

$$r_F = \frac{p-a}{p} r_A + \frac{p-b}{p} r_B + \frac{p-c}{p} r_C = 3r_1 - 2r_2$$

(e) اگر در مثال ۹.۸.۲، نقطه‌های M ، N و P ، نقطه‌های تماس دایره محاطی داخلی با ضلع‌های مثلث ABC باشند، با توجه به ویژگی مماس‌های وارد از یک نقطه بر دایره، خواهیم داشت (شکل ۴۴.۲):

$$\alpha c = |AM| = |AP| = (1-\gamma)b,$$

$$(1-\alpha)c = |BM| = |BN| = \beta a,$$

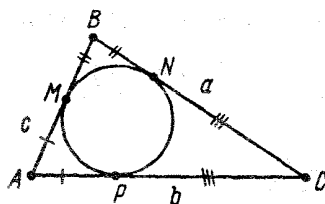
$$(1-\beta)a = |CN| = |CP| = \gamma b$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{p-a}{c}, \quad 1-\alpha = \frac{p-b}{c},$$

$$\beta = \frac{p-b}{a}, \quad 1-\beta = \frac{p-c}{a},$$

$$\gamma = \frac{p-c}{b}, \quad 1-\gamma = \frac{p-a}{b}$$



شکل ۴۴.۲

و بنابراین

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = \frac{p-b}{c} \cdot \frac{p-c}{a} \cdot \frac{p-a}{b} = \alpha\beta\gamma$$

و رابطه (۲.۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا

$$\begin{aligned} \beta(1-\alpha) &= \frac{p-b}{a} \cdot \frac{p-b}{c} = \\ &= 1 - \frac{(p-a)(p-c) + (p-a)(p-b) + (p-c)(p-b)}{ac} < 1 \end{aligned}$$

به این ترتیب، خط‌های راست (AN) ، (BP) و (CM) در يك نقطه به هم می‌رسند. با استفاده از اتحادهای

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)} &= \frac{(p-b)(p-c)}{bc-(p-a)^2} = \\ &= \frac{(p-b)(p-c)}{(p-a+p-c)(p-a+p-b)-(p-a)^2} = \frac{(p-b)(p-c)}{\varepsilon}, \\ \varepsilon &= (p-a)(p-c) + (p-a)(p-b) + (p-c)(p-b), \\ \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)} &= \frac{(p-a)(p-c)}{\varepsilon}, \\ \frac{\beta(1-\gamma)}{(1-\gamma)(1-\beta)} &= \frac{(p-a)(p-b)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

می‌توان شعاع حامل r_0 را، برای نقطهٔ مشترك این خط‌های راست پیدا کرد:

$$r_0 = \frac{(p-b)(p-c)r_A + (p-c)(p-a)r_B + (p-a)(p-b)r_C}{(p-a)(p-b) + (p-a)(p-c) + (p-b)(p-c)}$$

مثال ۱۲.۸.۲*. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ ، در صفحه یا فضا، طوری

قرار گرفته‌اند که خط‌های راست واصل بین رأس‌های A و A' ، B و B' ، C و C' از نقطهٔ O می‌گذرند. می‌دانیم، هیچ دو ضلع متناظری از دو مثلث موازی نیستند. ثابت کنید، نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظر این دو مثلث، بر يك خط راست قرار دارند.

حل. O را قطب می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $\vec{OA}_1 = \mathbf{a}$ ، $\vec{OB}_1 = \mathbf{b}$ و

$\vec{OC}_1 = \vec{c}$ چون A ، B و C نقطه‌های مشخصی هستند، عددهای p ، q و r وجود دارند، به نحوی که $\vec{OA} = -pa$ ، $\vec{OB} = -qb$ و $\vec{OC} = -rc$. خط‌های راست (A_1C_1) و (AC) در صفحه (OAC) قرار دارند و باهم موازی نیستند و، بنابراین، متقاطع اند؛ نقطه برخورد آن‌ها را M می‌گیریم. به همین ترتیب، N را نقطه برخورد خط‌های راست (A_1B_1) و (AB) و Q را نقطه برخورد خط‌های راست (B_1C_1) و (BC) فرض می‌کنیم. شعاع حامل‌های نقطه‌های M ، N و Q را، به ترتیب، $\mathbf{r}_1$ ، $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ می‌نامیم. بردار $\vec{OM} = \mathbf{r}_1$ را محاسبه می‌کنیم. نقطه M بر خط راست (A_1C_1) قرار دارد، بنابراین عدد t وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\mathbf{r}_1 = ta + (1-t)\mathbf{c}$$

چون $M \in (AC)$ ، برای مقداری از $\tau \in \mathbf{R}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{r}_1 = \tau(-pa) + (1-\tau)(-rc)$$

که از آن‌جا، به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{r}_1 = ta + (1-t)\mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_1 = -\tau pa - (1-\tau)rc$$

سمت راست این معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم، با توجه به این که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ ، مستقل خطی اند، به دست می‌آید:

$$t = -\tau p, \quad 1-t = -(1-\tau)r$$

از آن‌جا: $\tau = \frac{1+r}{r-p}$ و $t = -\frac{p(1+r)}{r-p}$. بنابراین

$$\mathbf{r}_1 = \vec{OM} = \frac{p(1+r)}{p-r}\mathbf{a} + \frac{r(1+p)}{r-p}\mathbf{c}$$

و به همین ترتیب

$$\mathbf{r}_2 = \vec{ON} = \frac{p(1+q)}{p-q}\mathbf{a} + \frac{q(1+p)}{q-p}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}_r = \overrightarrow{OQ} = \frac{q(1+r)}{q-r}\mathbf{b} + \frac{r(1+q)}{r-q}\mathbf{c}$$

برای بردارهای $\overrightarrow{MQ}$ و $\overrightarrow{MN}$ ، به این عبارت‌ها می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} = \mathbf{r}_r - \mathbf{r}_1 &= \frac{1+p}{(p-r)(p-q)}[p(q-r)\mathbf{a} + q(r-p)\mathbf{b} + \\ &+ r(p-q)\mathbf{c}];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MQ} = \mathbf{r}_r - \mathbf{r}_1 &= \frac{1+r}{(r-p)(q-r)}[p(q-r)\mathbf{a} + q(r-p)\mathbf{b} + \\ &+ r(p-q)\mathbf{c}]\end{aligned}$$

یعنی بردارهای $\overrightarrow{MQ}$ و $\overrightarrow{MN}$ هم‌راستا هستند و، بنابراین، نقطه‌های M ، N و Q به یک خط راست تعلق دارند.

مثال ۱۳.۸.۲ $ABCD$ را یک چهارضلعی و K ، L ، M و N را، به ترتیب، مرکز ثقل مثلث‌های ABC ، BCD ، CDA و DAB می‌گیریم. ثابت کنید، خط‌های راست واصل بین نقطه‌های وسط ضلع‌های روبه‌رو در چهارضلعی $ABCD$ ، یکدیگر را در همان نقطه‌ای قطع می‌کنند که خط‌های راست واصل بین نقطه‌های وسط ضلع‌های روبه‌رو در چهارضلعی $KLMN$ به هم می‌رسند.

حل. O را قطب ثابت می‌گیریم. با توجه به نتیجه‌های مثال ۲.۸.۲، اگر Q و Q' را نقطه‌های برخورد خط‌های راست واصل بین نقطه‌های وسط ضلع‌های روبه‌رو، به ترتیب، در چهارضلعی‌های $ABCD$ و $KLMN$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$$

در همان مثال ۲.۸.۲، ثابت کردیم:

$$\vec{OK} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}), \quad \vec{OL} = \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}),$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OA}), \quad \vec{ON} = \frac{1}{3}(\vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OB})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \vec{OQ}' &= \frac{1}{4} \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OC} + \vec{OD} + \\ &+ \vec{OA} + \vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = \vec{OQ} \end{aligned}$$

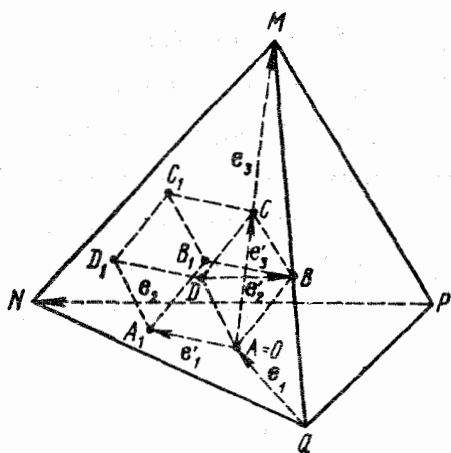
یعنی $Q = Q'$. در ضمن، توجه کنیم که

$$\begin{aligned} \vec{QK} &= \vec{OK} - \vec{OQ} = \frac{1}{12} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OD}) = \\ &= -\frac{1}{3} \vec{QD} \end{aligned}$$

$$\vec{QL} = -\frac{1}{3} \vec{QA}, \quad \vec{QM} = -\frac{1}{3} \vec{QB}, \quad \vec{QN} = -\frac{1}{3} \vec{QC}$$

یعنی چهارضلعی $KLMN$ ، میانس چهارضلعی $ABCD$ ، درجانیسی به مرکز Q و با نسبت تجانسی برابر $\frac{1}{3}$ است.

مثال ۲.۸.۲. طول ضلع قاعده NPQ از هرم منتظم $MNPQ$ برابر با ۲ و ارتفاع آن برابر با ۳ است. رأس A در مکعب $ABCD A' B' C' D'$ بر نقطه O مرکز قاعده هرم و رأس C بر ارتفاع $[OM]$ و پاره خط راست $[BC_1]$ بر صفحه (MNP) واقع است. طول یال مکعب را پیدا کنید.
حل. $|AB| = a$ می گیریم و دو دستگاه $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ (قدیم) و؛



شکل ۴۵.۲

$\{e_1, e_2, e_3, e'_1, e'_2, e'_3\}$ (جدید) را در نظر می‌گیریم، که در آن‌ها
 $e_1 = \vec{QO}$, $e_2 = \vec{PN}$, $e_3 = \vec{OM}$, $e'_1 = \vec{AA_1}$, $e'_2 = \vec{DB}$, $e'_3 = \vec{AC}$
 (شکل ۴۵.۲). دستگاه «قدیم» را برای هرم و دستگاه «جدید» را برای
 مکعب در نظر می‌گیریم.

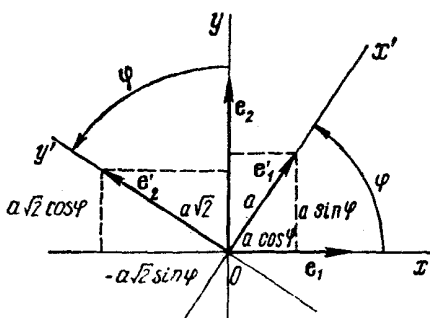
بنابر فرض $C \in [OM]$ و $A = O$ ، بنابراین بردارهای e_3 و e'_3 در یک
 امتدادند و چون $|OM| = 3$ و $|AC| = |AB|\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ داریم:

$$e'_3 = \frac{1}{3}a\sqrt{2}e_3$$

(مثال ۷.۳.۲ را ببینید). بردارهای $e_1, e_2, e_3, e'_1, e'_2, e'_3$ هم‌صفحه‌اند؛ در صفحه‌ای
 موازی صفحه (NPQ) قرار دارند. در نتیجه، دو دستگاه مختصات
 $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ و $\{O, e'_1, e'_2, e'_3\}$ در صفحه (NPQ) واقع‌اند. این دو دستگاه
 مختصات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بردارهای e_1 و e_2 ، به ترتیب، با خط‌های راست (QO) و (PN)
 موازی‌اند. چون (QO) بر (PN) عمود است، محورهای x و y در دستگاه
 مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ برهم عمودند. به همین ترتیب، بردارهای e'_1 و e'_2

به ترتیب، با خط‌های راست (AA_1) و (DB) — که برهم عمودند — موازی‌اند. در نتیجه، محورهای x' و y' دستگاه مختصات $\{O, e'_1, e'_2\}$ نیز برهم عمودند. به این ترتیب، دو دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2\}$ و $\{O, e'_1, e'_2\}$ ، در صفحه (NPQ) دارای مبدا مشترک هستند و، هر کدام، محورهایی عمود برهم دارند. در این صورت، می‌توان دستگاه $\{O, e'_1, e'_2\}$ را از دستگاه $\{O, e_1, e_2\}$ ، با دوران به اندازه زاویه φ ($0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$)، در جهت مثبت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) به دست آورد. (شکل ۴۶.۲) و یا به کمک دوران

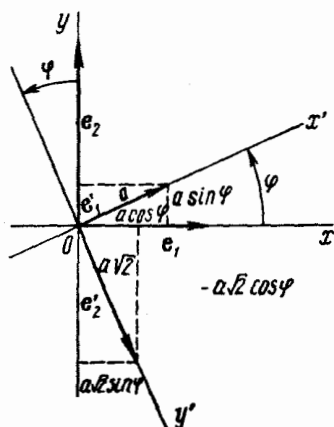


شکل ۴۶.۲

به اندازه زاویه φ و، سپس، تقارن (شکل ۴۷.۲). شکل ۴۵.۲، حالت دوم را نشان می‌دهد.

اکنون دستورهای عبور از دستگاه مختصات «قدیم» به دستگاه مختصات «جدید» را پیدا می‌کنیم. فرض کنید، دستگاه مختصات $\{O, e'_1, e'_2\}$ را از دوران دستگاه $\{O, e_1, e_2\}$ ، به اندازه زاویه φ ، به دست آورده باشیم (شکل ۴۶.۲). چون $|e_1| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ، $|e_2| = 2$ ، $|e'_1| = a$ و $|e'_2| = a\sqrt{2}$

بنابراین



شکل ۴۷.۲

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \cos \varphi \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} a \sin \varphi \cdot e_2,$$

$$e'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \sin \varphi \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \cos \varphi \cdot e_2$$

و چون $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} a \sqrt{2} e_3$ دستورهای انتقال به این صورت درمی آیند:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \cos \varphi \cdot x' - \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \sin \varphi \cdot y',$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} a \sin \varphi \cdot x' + \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \cos \varphi \cdot y', \quad (2.83)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} a \sqrt{2} \cdot z'$$

و اگر برای عبور از دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2\}$ به دستگاه مختصات $\{O, e'_1, e'_2\}$ از تقارن هم استفاده کرده باشیم (شکل ۴۷.۲)، آن وقت

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \cos \varphi \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} a \sin \varphi \cdot e_2,$$

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \sin \varphi \cdot e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{2} \cos \varphi \cdot e_2,$$

$$e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} a \sqrt{2} e_3$$

و خواهیم داشت:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} a \sqrt{3} \cos \varphi \cdot x' + \frac{1}{\sqrt{3}} a \sqrt{6} \sin \varphi \cdot y',$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} a \sin \varphi \cdot x' - \frac{1}{\sqrt{3}} a \sqrt{2} \cos \varphi \cdot y', \quad (2.84)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} a \sqrt{2} z'$$

در دستگاه مختصات «قدیم» داریم:

$$M(0, 0, 1), N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

بنابراین، با توجه به دستورهای (۲.۶۴)، معادله صفحه (MNP) ، در دستگاه «قدیم» به این صورت است:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}-0 & \frac{1}{\sqrt{3}}-0 & 0-1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}-0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff x \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (z-1) \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{از آن جا } 2x + z - 1 = 0.$$

در دستگاه مختصات «جدید»: $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $C_1(1, 0, 1)$ اگر

از دستور (۲.۸۳) استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$B\left(-\frac{1}{4}a\sqrt{6}\sin\varphi, \frac{1}{4}a\sqrt{2}\cos\varphi, \frac{1}{6}a\sqrt{2}\right)$$

$$C_1\left(\frac{1}{4}a\sqrt{3}\cos\varphi, \frac{1}{4}a\sin\varphi, \frac{1}{3}a\sqrt{2}\right)$$

چون، بنا به فرض، نقطه‌های B و C_1 متعلق به صفحه (MNP) هستند، باید داشته باشیم:

$$2\left(-\frac{1}{4}a\sqrt{6}\sin\varphi\right) + \frac{1}{6}a\sqrt{2} - 1 = 0$$

$$2\left(\frac{1}{4}a\sqrt{3}\cos\varphi\right) + \frac{1}{3}a\sqrt{2} - 1 = 0$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$\sin\varphi = \frac{a - 3\sqrt{2}}{3a\sqrt{3}}, \quad \cos\varphi = \frac{3 - a\sqrt{2}}{3a\sqrt{3}}$$

که با توجه به اتحاد $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{(a - 3\sqrt{2})^2}{27a^2} + \frac{(3 - a\sqrt{2})^2}{27a^2} = 1 \iff 8a^2 + 4\sqrt{2}a - 9 = 0$$

با حل معادله، و با توجه به این که $a > 0$ ، به دست می‌آید:

$$a = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{4}$$

اگر از دستورهای (۲.۸۴) استفاده می‌کردیم؛ به دست می‌آمد:

$$B\left(\frac{1}{4}a\sqrt{6}\sin\varphi, -\frac{1}{4}a\sqrt{2}\cos\varphi, \frac{1}{6}a\sqrt{2}\right),$$

$$C_1\left(\frac{1}{4}a\sqrt{3}\cos\varphi, \frac{1}{4}a\sin\varphi, \frac{1}{3}a\sqrt{2}\right)$$

و چون $B \in (MNP)$ و $C_1 \in (MNP)$ ، بنابراین

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt[3]{2} - a}{3a\sqrt{3}}, \quad \cos \varphi = \frac{3 - a\sqrt{2}}{3a\sqrt{3}}$$

که بازهم، شبیه حالت قبل، به دست می آید $a = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{4}$.

فصل سوم

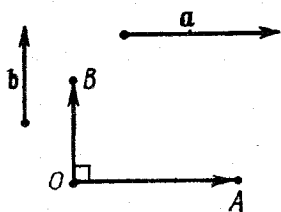
حاصل ضرب عددی (اسکالر) دو بردار

بخش ۱۰۳. زاویه بین بردارها.

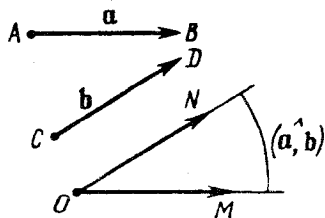
تعریف حاصل ضرب اسکالر. قانون کسینوس

زاویه بین دو بردار غیر صفر $\vec{a} = \vec{AB}$ و $\vec{b} = \vec{CD}$ ، به زاویه بین نیم خط‌های راست $[AB]$ و $[CD]$ گفته می‌شود. بنابراین، اگر بردارهای $\vec{OM} = \vec{a}$ و $\vec{ON} = \vec{b}$ را، از نقطه‌ای مثل O رسم کنیم، (شکل ۱۰۳)، اندازه زاویه محدب MON ، بنابه تعریف، برابر با اندازه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و آن را، با نماد $(\vec{a}, \vec{b})$ نشان می‌دهند.

اگر یکی از بردارهای $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ ، بردار صفر باشد، آن وقت زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامعین می‌شود. زاویه بین دو بردار، مقدارهای از ۰ درجه تا ۱۸۰ درجه را قبول می‌کند. اگر دو بردار غیر صفر، هم راست باشند،



شکل ۲۰۳



شکل ۱۰۳

زاویه بین آنها، در صورت هم جهت بودن بردارها برابر صفر، و در صورتی که در خلاف جهت یکدیگر باشند، برابر ۱۸۰ درجه است. اگر زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر ۹۰ درجه باشد، دو بردار را عمود برهم گویند (و می نویسند: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ؛ شکل ۲.۳). در حالتی هم که، یکی از دو بردار، برابر صفر باشد، آنها را عمود برهم به حساب می آورند.

مثال ۰.۱۰.۱.۳ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را دو بردار غیر صفر و غیر هم راستا می گیریم.

ثابت کنید، بردار

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، زاویه های برابر تشکیل می دهد.

حل. بردارهای $\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ و $\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ ، بردارهای یکه اند:

$$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{b}_1| = 1$$

دو بردار $\vec{OA} = \mathbf{a}_1$ و $\vec{OB} = \mathbf{b}_1$ را از نقطه O رسم می کنیم متوازی الاضلاع

$OACB$ را روی این دو بردار

می سازیم (شکل ۳.۳). چون

$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{b}_1|$ ، بنابراین چهارضلعی

$OACB$ لوزی است و قطر (OC)

نیمساز زاویه AOB است. به این

ترتیب، بردار قطر لوزی، یعنی

$$\mathbf{c} = \vec{OC} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$$

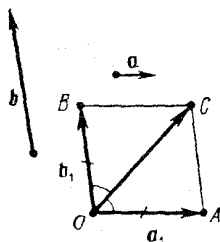
یا بردارهای $\vec{OA} = \mathbf{a}_1$ و $\vec{OB} = \mathbf{b}_1$

و بنابراین با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ که

با $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{b}_1$ هم جهت اند، زاویه های برابر می سازد.

شکل ۳.۳

حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، که به آن حاصل اسکالر



دو بردار هم می گویند، بنا به تعریف، برابر است با عددی که از حاصل ضرب طول های دو بردار در کسینوس زاویه بین دو بردار به دست می آید. حاصل ضرب عددی را با نماد $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ یا $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ نشان می دهند. بنا براین

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$$

اگر یکی از دو بردار صفر باشد، بنا به تعریف، حاصل ضرب اسکالر آن ها برابر صفر است:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{b}) = 0$$

اگر با دو بردار غیر صفر سروکار داشته باشیم، زاویه بین دو بردار را از دستور زیر به دست می آوریم:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \quad (3.1)$$

حاصل ضرب اسکالر $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ برابر است با $|\mathbf{a}|^2$ و به آن اسکالر مربع بردار $\mathbf{a}$ گویند و با نماد $(\mathbf{a})^2$ یا $\mathbf{a}^2$ نشان می دهند. طول بردار $\mathbf{a}$ و اسکالر مربع آن، با رابطه زیر به هم مربوط اند:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \quad (3.2)$$

اگر زاویه بین دو بردار حاده باشد، حاصل ضرب داخلی آن ها مثبت، و اگر زاویه بین دو بردار منفرجه باشد، حاصل ضرب داخلی آن ها منفی است.

مثال ۳.۱۰۳. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، می دانیم: $|\overrightarrow{AC}| = b$ و $\hat{A} = \alpha$ مطلوب است محاسبه $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.
حل. داریم: $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \hat{C} = 90^\circ - \alpha$ ، $|\overrightarrow{CB}| = b \sin \alpha$ و $|\overrightarrow{CA}| = b$ بنا براین

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) &= |\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \\ &= b \sin \alpha \cdot b \cos(90^\circ - \alpha) = b^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

مثال ۳.۱۰۳. ثابت کنید، تنها وقتی حاصل ضرب داخلی دو بردار برابر

صفر است که، این دو بردار، برهم عمود باشند.

حل. اگر بردارهای a و b غیر صفر باشند، آن وقت $|a| \neq 0$ و

$|b| \neq 0$ ؛ بنا براین

$$(a, b) = 0 \iff |a| \cdot |b| \cdot \cos(\widehat{a, b}) = 0$$

و از آن جا $\cos(\widehat{a, b}) = 0$ یا $a \perp b$.

اگر یکی از دو بردار a و b صفر باشد، آن وقت، بنا به تعریف، برهم

عمودند و داریم: $(a, b) = 0$.

مثال ۴۰۱۰۳. (قانون کسینوس). ثابت کنید، برای هر دو بردار a و

b داریم:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2(a, b) \quad (3.3)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(a, b) \quad (3.4)$$

حل. فرض می‌کنیم: $\vec{OA} = a$ و $\vec{OB} = b$

حالت اول. بردارهای a و b هم‌راستا نیستند. متوازی‌الاضلاع

$OBCA$ را در نظر می‌گیریم (شکل‌های ۴.۳ و ۶.۳) و قرار می‌گذاریم:

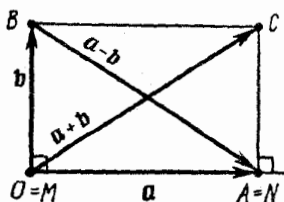
$$a = |a|, b = |b|, \varphi = (\widehat{a, b})$$

و M و N را، پای عمودهای وارد از نقطه‌های B و C بر خط راست (OA)

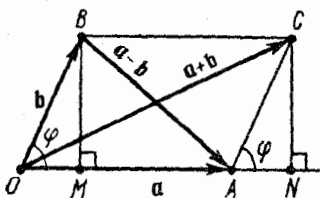
می‌گیریم.

با توجه به قضیه فیثاغورث، در مثلث‌های قائم‌الزاویه AMB و ONC

داریم:



شکل ۳.۵



شکل ۴.۴

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |MB|^2,$$

$$|OC|^2 = |ON|^2 + |NC|^2 \quad (۳.۵)$$

اگر φ ، زاویه‌ای حاده باشد، (شکل ۴.۳)، آن گاه

$$|AM| = |OA| - |OM| = a - b \cos \varphi,$$

$$|MB| = |NC| = b \sin \varphi,$$

$$|ON| = |OA| + |AN| = a + b \cos \varphi$$

و اگر $\varphi = 90^\circ$ (شکل ۵.۳)، آن گاه

$$|AM| = |OA| = a = a - b \cos \varphi,$$

$$|MB| = |NC| = b = b \sin \varphi,$$

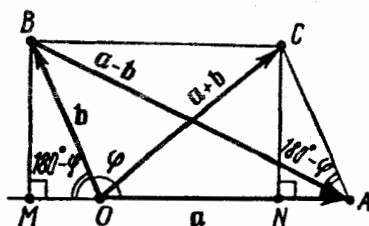
$$|ON| = |OA| = a = a + b \cos \varphi$$

و سرانجام، اگر φ ، زاویه‌ای منفرجه باشد، (شکل ۶.۳)، آن گاه

$$|AM| = |OA| + |OM| = a + b \cos (180^\circ - \varphi) = a - b \cos \varphi,$$

$$|MB| = |NC| = b \sin (180^\circ - \varphi) = b \sin \varphi,$$

$$|ON| = |OA| - |AN| = a + b \cos \varphi$$



به این ترتیب، هر چه باشد، داریم:

$$|AM| = a - b \cos \varphi, \quad |MB| = |NC| = b \sin \varphi,$$

$$|ON| = a + b \cos \varphi$$

از آنجا، با توجه به رابطه‌های (۳.۵) به دست می‌آید:

$$(a-b)^2 = |AB|^2 = (a - b \cos \varphi)^2 + (b \sin \varphi)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = a^2 + b^2 - 2(a, b),$$

$$(a+b)^2 = |OC|^2 = (a + b \cos \varphi)^2 + (b \sin \varphi)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi = a^2 + b^2 + 2(a, b)$$

حالت دوم. بردارهای a و b هم‌راستا هستند. اگر $b=0$ ، درستی
برابری‌های (۳.۳) و (۳.۴) روشن است:

$$(a \pm 0)^2 = |a|^2 = a^2 + 0^2 \pm 2(a, 0)$$

و اگر $b \neq 0$ ، آن وقت، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی که، برای آن
داشته باشیم: $a = kb$. بنا براین

$$(a \pm b)^2 = |a \pm b|^2 = |(k \pm 1)b|^2 = (|k \pm 1| \cdot |b|)^2 =$$

$$= (k \pm 1)^2 |b|^2 = (k^2 + 1 \pm 2k) |b|^2 =$$

$$= (|k| \cdot |b|)^2 + |b|^2 \pm 2k |b|^2 = a^2 + b^2 \pm 2k |b|^2$$

اگر $k > 0$ ، آن وقت بردارهای a و b هم‌جهت‌اند و

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos 0^\circ = |a| |b| \cdot 1 = |kb| \cdot |b| = |k| \cdot |b| \cdot |b| = k |b|^2$$

اگر $k = 0$ ، یعنی $a = 0$ و

$$(a, b) = 0 = 0 \cdot |b|^2 = k |b|^2$$

و اگر $k < 0$ ، یعنی بردارهای a و b در دو جهت مختلف باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(a, b) &= |a| \cdot |b| \cdot \cos 180^\circ = |kb| \cdot |b| \cdot (-1) = \\ &= |k| \cdot |b| \cdot |b| \cdot (-1) = k|b|^2\end{aligned}$$

بنابراین، درهمة حالتها $2k|b|^2 = 2(a, b)$ یعنی

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2(a, b)$$

مثال ۵۰۱۰۳. ثابت کنید، مجموع مجذورهای طول قطرهای

متوازی الاضلاع، برابر است با مجموع مجذورهای طول چهار ضلع آن.

حل. $a = OA$ و $b = OB$ را بردار ضلع‌های متوازی الاضلاع

$OACB$ می‌گیریم (شکل‌های ۲.۳ و ۶.۳). برای بردار قطرها داریم:

$$a + b = \overrightarrow{OC}, \quad a - b = \overrightarrow{AB}$$

از مجموع برابری‌های (۳.۳) و (۳.۴) به دست می‌آید:

$$(a - b)^2 + (a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2 \quad (3.6)$$

چون $|BC| = |OA| = |a|$ و $|AC| = |OB| = |b|$ ، با توجه به برابری

(۳.۶) خواهیم داشت:

$$|AB|^2 + |OC|^2 = (|OA|^2 + |BC|^2) + (|OB|^2 + |AC|^2)$$

مثال ۶۰۱۰۳. می‌دانیم $|a| = 11$ ، $|b| = 23$ و $|a - b| = 30$.

مطلوب است محاسبه $|a + b|$ و زاویه (a, b) .

حل. با توجه به برابری (۳.۶) داریم:

$$|a + b| = \sqrt{2|a|^2 + 2|b|^2 - (a - b)^2} = 20$$

و با توجه به قانون کسینوس [دستور (۳.۳)] را ببینید،

$$(a, b) = \frac{1}{2} [a^2 + b^2 - (a - b)^2] = -125$$

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{(a, b)}{|a||b|} = -\frac{125}{253}$$

یعنی

$$(\widehat{a, b}) = 180^\circ - \arccos \frac{125}{253}$$

مثال ۷.۱.۳. مطلوب است طول قطرهای لوزی $OBCA$ (شکل ۳.۳)،
به شرطی که طول ضلع آن برابر واحد و زاویه AOB برابر
 $\arcsin \frac{24}{25}$ باشد.

حل. بنا بر قانون کسینوس داریم:

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= (\vec{OB} - \vec{OA})^2 = |\vec{OB}|^2 + |\vec{OA}|^2 - 2(\vec{OB}, \vec{OA}) = \\ &= 2 - 2 \cos \widehat{AOB} \end{aligned}$$

و چون زاویه AOB حاده است، پس

$$\cos \widehat{AOB} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{AOB}} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$$

$$|AB| = \sqrt{2 - 2 \times \frac{7}{25}} = \frac{6}{5} \quad \text{بنا بر این ترتیب}$$

$$|OC| = \sqrt{2 + 2 \cos \widehat{AOB}} = \frac{8}{5}$$

مثال ۸.۱.۳. ثابت کنید، دو بردار a و b ، تنها وقتی برهم عمودند که
داشته باشیم:

$$|a+b| = |a-b|$$

حل. با توجه به رابطه‌های (۳.۳) و (۳.۴) داریم:

$$\frac{1}{4}(|a+b|^2 - |a-b|^2) =$$

$$= \frac{1}{4} [a^2 + b^2 + 2(a, b) - a^2 - b^2 + 2(a, b)] = (a, b) \quad (3.7)$$

در نتیجه، برابری $|a+b| = |a-b|$ ، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $(a, b) = 0$ ، یعنی وقتی که a و b برهم عمود باشند (مثال ۳.۱.۳ را ببینید).

مثال ۳.۱.۳. ثابت کنید: $(a+b, a-b) = a^2 - b^2$.

حل. $x = a+b$ و $y = a-b$ می گیریم؛ یعنی

$$a = \frac{1}{2}(x+y), \quad b = \frac{1}{2}(x-y)$$

در این صورت، با توجه به دستور (۳.۷) داریم:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{4} (|x+y|^2 - |x-y|^2) = (x, y) =$$

$$= (a+b, a-b)$$

مثال ۳.۱.۴. در مثلث ABC داریم:

$$|AB| = c, \quad |AC| = b, \quad |BC| = a$$

طول میانه $[CM]$ را محاسبه کنید.

حل. $|CM| = m_c$ می گیریم. چون $\vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{CA})$ ، با توجه

به رابطه (۳.۴) به دست می آید:

$$m_c^2 = \frac{1}{4} [b^2 + a^2 + 2(\vec{CB}, \vec{CA})]$$

و از برابری

$$c^2 = |AB|^2 = |\vec{AB}|^2 = |\vec{CB} - \vec{CA}|^2 = a^2 + b^2 - 2(\vec{CB}, \vec{CA})$$

به دست می آید:

$$(\vec{CB}, \vec{CA}) = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2) \quad (3.8)$$

در نتیجه $m_c^2 = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + a^2 + b^2 - c^2)$ ، یعنی

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \quad (3.9)$$

مثال ۱۱.۱.۳. در مثلث ABC ، طول سه ضلع معلوم اند:

$$|AB| = c, \quad |BC| = a, \quad |AC| = b$$

درستی برابری زیر را تحقیق کنید:

$$\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BA}, \vec{BC}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) &= \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

حل. بنا بر دستور (۳.۸) داریم:

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2); \quad (\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2);$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$$

از مجموع این سه برابری، به رابطه (۳.۱۰) می‌رسیم.

مثال ۱۲.۱.۳. m_a, m_b, m_c ، به ترتیب، میانه‌های وارد از رأس‌های

A, B و C ، در مثلث ABC هستند. ثابت کنید زاویه C منفرجه است، وقتی و فقط وقتی که داشته باشیم:

$$m_c^2 < \frac{m_a^2 + m_b^2}{2}$$

حل. زاویه C ، تنها وقتی منفرجه است که داشته باشیم: $(\vec{CB}, \vec{CA}) < 0$ ،

یعنی $0 < x = a^2 + b^2 - c^2$ [(۳.۸) را ببینید]. با توجه به دستور (۳.۹) داریم:

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2; \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2;$$

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

از مجموع این سه برابری به دست می آید:

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

بنابراین

$$3c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4m_c^2$$

که از آن جا نتیجه می شود: $c^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2)$ و به همین ترتیب:

$$a^2 = \frac{4}{9}(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2); \quad b^2 = \frac{4}{9}(2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2)$$

به این ترتیب:

$$x = a^2 + b^2 - c^2 = \frac{4}{9}(\Delta m_c^2 - m_a^2 - m_b^2)$$

یعنی:

$$x < 0 \iff \Delta m_c^2 < m_a^2 + m_b^2$$

مثال ۰۱۳۰۱۰۳. (دستور هرون). میان مساحت مثلث ABC ، بر حسب

طول ضلع ها.

$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|$$

حل. فرض می کنیم: $\mathbf{b} = \vec{CA}$, $\mathbf{a} = \vec{CB}$, $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ، مساحت S ،

مثلث ABC می دانیم $S = \frac{1}{2}ab \sin \varphi$ ، یعنی

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 \varphi) = \frac{1}{4}[a^2b^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2]$$

از طرف دیگر، بنا بر دستور (۳.۸) داریم:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left(ab + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right) \left(ab - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{16} [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = \\ &= \frac{1}{16} (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \end{aligned}$$

اکنون، اگر $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ فرض کنیم، به دست می آید:

$$a+b-c = 2(p-c), \quad a+c-b = 2(p-b),$$

$$c-a+b = 2(p-a)$$

و از آنجا

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

و سرانجام

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

بخش ۲.۳. ویژگی های حاصل ضرب داخلی

برای هر سه بردار دلخواه a, b, c و عدد حقیقی دلخواه λ ،

همیشه داریم:

$$1^\circ. (a, b) = (b, a) \text{ (ویژگی جابه جایی)};$$

$$2^\circ. (\lambda a, b) = \lambda(a, b);$$

$$3^\circ. (a+b, c) = (a, c) + (b, c) \text{ (ویژگی پخش)}.$$

□ ویژگی 1° ، به طور مستقیم از تعریف حاصل ضرب داخلی دو بردار

و، در ضمن، با توجه به این که برای بردارهای غیر صفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ داریم
 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ ، نتیجه می شود.

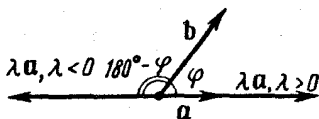
اگر $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ یا $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، آن وقت، برای هر عدد حقیقی λ ، ویژگی φ ،
 به طور مستقیم و از ضرب داخلی دو بردار نتیجه می شود. همچنین، برای هر
 دو بردار دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و عدد λ ، درستی ویژگی φ روشن است. در
 حالت کلی $\lambda \neq 0$ ، $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ، فرض می کنیم: $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$. برای
 $\lambda > 0$ داریم: $(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (شکل ۷.۳)، بنابراین

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= |\lambda \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ &= \lambda |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

و اگر $\lambda < 0$ (شکل ۷.۳)، آن گاه $(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 180^\circ - \varphi$ و

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= |\lambda \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \times \\ &\times \cos(180^\circ - \varphi) = (-\lambda) |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot (-\cos \varphi) = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

به این ترتیب، ویژگی φ ، در هر حالتی درست است.



شکل ۷.۳

برای اثبات ویژگی φ ، از دستور زیر استفاده می کنیم:

$$0 = (\mathbf{m} + \mathbf{n})^2 + (\mathbf{m} - \mathbf{n})^2 - 2(\mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2) \quad (3.11)$$

[(۳.۶) را ببینید.] اگر فرض کنیم:

$$m = \frac{a+b}{2} + c, \quad n = \frac{a-b}{2}$$

به دست می آید: $m - n = b + c$, $m + n = a + c$ و بنا بر قانون کسینوس

$$(m+n)^2 = (a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2(a, c),$$

$$(m-n)^2 = (b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2(b, c),$$

$$m^2 = \left(\frac{a+b}{2} + c\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + c^2 + 2\left(\frac{a+b}{2}, c\right)$$

با توجه به ویژگی 2° ، داریم:

$$2\left(\frac{a+b}{2}, c\right) = 2 \times \frac{1}{2}(a+b, c) = (a+b, c)$$

و به جز آن

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left|\frac{a+b}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}|a+b|^2 = \frac{1}{4}[a^2 + b^2 + 2(a, b)]$$

به همین ترتیب، می توان ثابت کرد:

$$n^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[a^2 + b^2 - 2(a, b)]$$

[(۳.۳) را ببینید.] آنچه را به دست آورده ایم، در (۳.۱۱) قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 + c^2 + 2(a, c) + b^2 + c^2 + 2(b, c) - \\ &- 2\left\{\left[\frac{1}{4}(a^2 + b^2) + 2(a, b) + c^2 + (a+b, c)\right] + \right. \\ &+ \left.\frac{1}{4}[a^2 + b^2 - 2(a, b)]\right\} = 2((a, c) + (b, c) - \\ &- (a+b, c)), \quad (a+b, c) = (a, c) + (b, c) \end{aligned}$$

ویژگی 3° ثابت شد. ■

مثال ۰۱۰۳.۳ ثابت کنید برای بردارهای دلخواه a, b, c, p, q و

عددهای دلخواه $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ همیشه داریم:

$$(x_1 a + y_1 b + z_1 c, q) = x_1(a, q) + y_1(b, q) + z_1(c, q), \quad (3.12)$$

$$(p, x_2 a + y_2 b + z_2 c) = x_2(p, a) + y_2(p, b) + z_2(p, c),$$

$$(x_1 a + y_1 b + z_1 c, x_2 a + y_2 b + z_2 c) = \quad (3.13)$$

$$= x_1 x_2 a^2 + y_1 y_2 b^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(a, b) + z_1 z_2 c^2 +$$

$$+ (x_1 z_2 + x_2 z_1)(a, c) + (y_1 z_2 + y_2 z_1)(b, c) \quad (3.14)$$

[دستورهای (۳.۱۲) و (۳.۱۳) نشان می‌دهند که، حاصل ضرب اسکالر، در رابطه با هر کدام از عامل‌ها، دارای ویژگی خطی است. دستور (۳.۱۴)، روش کلی را برای ضرب اسکالر بردارها، با مختصات در پایه $\{a, b, c\}$ مشخص می‌کند.]

حل. بنابر ویژگی ۳° داریم:

$$(x_1 a + y_1 b + z_1 c, q) = [x_1 a + (y_1 b + z_1 c), q] =$$

$$= (x_1 a, q) + (y_1 b + z_1 c, q) = x_1(a, q) + (y_1 b, q) +$$

$$+ (z_1 c, q) = x_1(a, q) + y_1(b, q) + z_1(c, q)$$

(در این جا، از ویژگی ۲° استفاده کرده‌ایم.) به این ترتیب، برابری (۳.۱۲) ثابت شد.

بنابر ویژگی ۱° و دستور (۳.۱۲) داریم:

$$(p, x_2 a + y_2 b + z_2 c) = (x_2 a + y_2 b + z_2 c, p) =$$

$$= x_2(a, p) + y_2(b, p) + z_2(c, p) =$$

$$= x_2(p, a) + y_2(p, b) + z_2(p, c)$$

برابری (۳.۱۳) ثابت شد.

اکنون، فرض می‌کنیم:

$$p = x_1 a + y_1 b + z_1 c, \quad q = x_2 a + y_2 b + z_2 c$$

با توجه به دستورهای (۳.۱۲) و (۳.۱۳)، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (p, q) &= (x_1 a + y_1 b + z_1 c, q) = x_1 (a, q) + \\ &+ y_1 (b, q) + z_1 (c, q) = x_1 (a, x_2 a + y_2 b + z_2 c) + \\ &+ y_1 (b, x_2 a + y_2 b + z_2 c) + z_1 (c, x_2 a + y_2 b + z_2 c) = \\ &= x_1 [x_2 (a, a) + y_2 (a, b) + z_2 (a, c)] + y_1 [x_2 (a, b) + \\ &+ y_2 (b, b) + z_2 (b, c)] + z_1 [x_2 (a, c) + y_2 (b, c) + \\ &+ z_2 (c, c)] = x_1 x_2 a^2 + y_1 y_2 b^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(a, b) + \\ &+ z_1 z_2 c^2 + (x_1 z_2 + x_2 z_1)(a, c) + (y_1 z_2 + y_2 z_1)(b, c) \end{aligned}$$

دستور (۳.۱۴) هم ثابت شد. این برابری، به ازای $c = 0$ ، به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{aligned} (x_1 a + y_1 b, x_2 a + y_2 b) &= x_1 x_2 a^2 + y_1 y_2 b^2 + \\ &+ (x_1 y_2 + x_2 y_1)(a, b) \end{aligned} \quad (3.15)$$

مثال ۲.۲.۳. برای بردارهای a, b, c داریم:

$$a + b + 2c = 0$$

اگر داشته باشیم: $|a| = 1, |b| = 4$ و $|c| = 2$ ، محاسبه کنید:

$$\mu = (a, b) + (b, c) + (c, a)$$

حل. چون $-c = a + b + c$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} 4 = c^2 &= (-c, -c) = (a + b + c, a + b + c) = a^2 + b^2 + \\ &+ c^2 + 2(a, b) + 2(b, c) + 2(c, a) = 1 + 16 + 4 + 2\mu \end{aligned}$$

و از آنجا $\mu = -\frac{17}{2}$.

مثال ۳.۲.۳. a و b بردارهای واحدند و می‌دانیم $|a+b| = \sqrt{3}$. حاصل $(2a-4b, 2a+5b)$ را محاسبه کنید. حل. داریم:

$$3 = |a+b|^2 = a^2 + b^2 + 2(a, b) = 1 + 1 + 2(a, b)$$

و بنابراین $(a, b) = \frac{1}{2}$. اکنون، با توجه به دستور (۳.۱۵) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}(2a-4b, 2a+5b) &= 6a^2 - 20b^2 + 7(a, b) = \\ &= 6 - 20 + \frac{7}{2} = -\frac{21}{2}\end{aligned}$$

مثال ۴.۲.۳. می‌دانیم: $|a| = 3$ ، $|b| = 2$ و $(a, b) = 120^\circ$. طول بردارهای $p = a + 2b$ و $q = 2a - b$ و حاصل ضرب داخلی این دو بردار و مقدار زاویه بین آن‌ها را پیدا کنید.

حل. $(a, b) = 3 \times 2 \times \cos 120^\circ = -3$. بنا بر دستور (۳.۱۵)

$$\begin{aligned}|p|^2 &= |p, p| = |a + 2b, a + 2b| = \\ &= a^2 + 4(a, b) + 4b^2 = 9 + (-12) + 16 = 13; |p| = \sqrt{13}; \\ |q|^2 &= |q, q| = |2a - b, 2a - b| = 4a^2 - 4(a, b) + \\ &+ b^2 = 52; |q| = 2\sqrt{13};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p, q) &= (a + 2b, 2a - b) = 2a^2 + 3(a, b) - 2b^2 = \\ &= 18 + (-9) - 8 = 1;\end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{(p, q)}{|p| \cdot |q|} = \frac{1}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{26}; \varphi = \arccos \frac{1}{26}$$

مثال ۵.۲.۳. دو بردار غیر صفر a و b طول‌هایی برابر دارند. اگر بدانیم، دو بردار $p = a + 3b$ و $q = 5a + 3b$ برهم عمودند، زاویه φ بین دو بردار a و b را پیدا کنید.

حل. چون p و q بر هم عمودند، داریم:

$$0 = (p, q) = (a + 3b, 5a + 3b) = 5a^2 + 18(a, b) + 9b^2 = 5|a|^2 + 18|a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi + 9|b|^2$$

و چون $|a| = |b| \neq 0$ ، بنابراین $\cos \varphi = -\frac{5}{9}$ ، یعنی

$$\varphi = 180^\circ - \arccos \frac{5}{9}$$

مثال ۶۰۲۰۳. $[AD]$ ، $[BE]$ و $[CF]$ ، میانه‌های مثلث ABC هستند.

مطلوب است محاسبه

$$\lambda = (\vec{BC}, \vec{AD}) + (\vec{CA}, \vec{BE}) + (\vec{AB}, \vec{CF})$$

حل. $a = \vec{CA}$ و $b = \vec{CB}$ می‌گیریم. بنابراین

$$\vec{BC} = -b, \vec{AD} = -a + \frac{1}{3}b, \vec{BE} = \frac{1}{3}a - b,$$

$$\vec{AB} = b - a, \vec{CF} = \frac{1}{3}(a + b)$$

و بنابر دستور (۳۰۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(-b, -a + \frac{1}{3}b\right) + \left(a, \frac{1}{3}a - b\right) + \left(b - a, \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b\right) = \\ &= (a, b) - \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}a^2 - (a, b) - \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 = 0 \end{aligned}$$

مثال ۷۰۲۰۳. ثابت کنید، برای هر ترتیبی از نقطه‌های A, B, C و D

در صفحه (یا در فضا)، داریم $\mu = 0$ ، به شرطی که

$$\mu = (\vec{BC}, \vec{AD}) + (\vec{CA}, \vec{BD}) + (\vec{AB}, \vec{CD})$$

حل. $a = \vec{DA}$ ، $b = \vec{DB}$ و $c = \vec{DC}$ می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned}\vec{BC} &= \mathbf{c} - \mathbf{b}, \quad \vec{AD} = -\mathbf{a}, \quad \vec{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}, \quad \vec{BD} = -\mathbf{b}, \\ \vec{AB} &= \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \vec{CD} = -\mathbf{c}\end{aligned}$$

از آن جا

$$\begin{aligned}\mu &= (\mathbf{c} - \mathbf{b}, -\mathbf{a}) + (\mathbf{a} - \mathbf{c}, -\mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a}, -\mathbf{c}) = \\ &= -(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \\ &\quad + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0\end{aligned}$$

مثال ۸.۲.۳. در منشور $ABCA_1B_1C_1$ داریم (شکل ۸.۳):

$$|AB| = c, \quad |BC| = a, \quad |CA| = b, \quad \widehat{BAA_1} = \alpha, \quad \widehat{CAA_1} = \beta$$

مطلوب است محاسبه زاویه BCC_1 .

حل. داریم:

$$\begin{aligned}\cos \widehat{BCC_1} &= \frac{(\vec{CB}, \vec{CC_1})}{|\vec{CB}| \cdot |\vec{CC_1}|} = \frac{(\vec{AB} - \vec{AC}, \vec{AA_1})}{|\vec{CB}| \cdot |\vec{AA_1}|} = \\ &= \frac{(\vec{AB}, \vec{AA_1}) - (\vec{AC}, \vec{AA_1})}{|\vec{CB}| \cdot |\vec{AA_1}|} = \\ &= \frac{|\vec{AB}| |\vec{AA_1}| \cos \alpha - |\vec{AC}| |\vec{AA_1}| \cos \beta}{|\vec{CB}| \cdot |\vec{AA_1}|} = \frac{c \cos \alpha - b \cos \beta}{a}\end{aligned}$$

و در حالت خاصی که مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد:

$$\cos \widehat{BCC_1} = \cos \alpha - \cos \beta$$

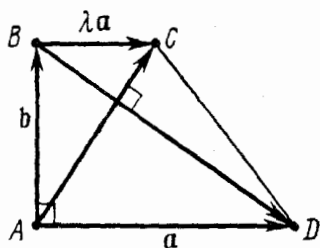
مثال ۹.۲.۳. در دوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ ، قطرهای برهم عمودند.

اگر نسبت طولهای دو قاعده: $|BC| : |AD| = \lambda$ ، نسبت طولهای دو قطر را پیدا کنید.

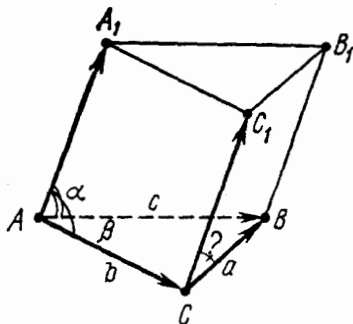
حل. $\vec{a} = \vec{AD}$ و $\vec{b} = \vec{AB}$ می گیریم (شکل ۹.۳). بنابراین

$$\vec{BC} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{AC} = \vec{b} + \lambda \vec{a}, \quad \vec{BD} = \vec{a} - \vec{b}$$

بنابراین فرض: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ و $(\vec{AC}, \vec{BD}) = 0$ ، یعنی



شکل ۹.۳



شکل ۸.۳

$$0 = (b + \lambda a, a - b) = \lambda a^2 + (1 - \lambda)(a, b) - b^2 = \lambda a^2 - b^2$$

بنابراین $b^2 = \lambda a^2$ و

$$\begin{aligned} \frac{|AC|}{|BD|} &= \sqrt{\frac{(\vec{AC}, \vec{AC})}{(\vec{BD}, \vec{BD})}} = \sqrt{\frac{(b + \lambda a, b + \lambda a)}{(a - b, a - b)}} = \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + 2\lambda(a, b) + \lambda^2 a^2}{a^2 + b^2 - 2(a, b)}} = \sqrt{\frac{b^2 + \lambda^2 a^2}{a^2 + b^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda a^2 + \lambda^2 a^2}{a^2 + \lambda a^2}} = \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

مثال ۱۰۰.۲.۳. زاویه بین دو قطر $[AC]$ و $[BD]$ را، در چهارضلعی محدب $ABCD$ پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم:

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$$

حل. فرض می کنیم: $\vec{a} = \vec{DA}$, $\vec{b} = \vec{DB}$, $\vec{c} = \vec{DC}$. بنابراین

$$\vec{AB} = b - a, \quad \vec{BC} = c - b$$

طبق فرض $a^2 + (b - a)^2 = (c - b)^2 + b^2$ ، یعنی

$$(a, b) = (c, b)$$

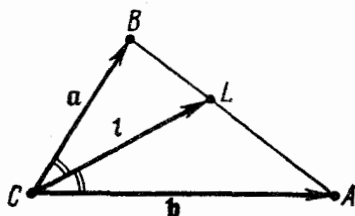
و از آن جا

$$(\vec{AC}, \vec{BD}) = (c - a, -b) = (a, b) - (c, b) = 0$$

یعنی قطرهای $[BD]$ و $[AC]$ برهم عمودند.

مثال ۰۱۱۰۲۰۳. بردار $l = \vec{CL}$ ، نیمساز زاویه C در مثل ABC را،

برحسب بردارهای $a = \vec{CB}$ و $b = \vec{CA}$ و طول آنها $a = |a|$ و $b = |b|$ بیان کنید.



شکل ۱۰۰۳

حل. زاویه‌های ACL و LCB باهم برابرند (شکل ۱۰۰۳)، بنابراین

کسینوس‌های آنها نیز برابر می‌شوند:

$$\frac{(b, l)}{|b| \cdot |l|} = \frac{(a, l)}{|a| \cdot |l|} \Rightarrow 0 = (ab - ba, l)$$

نقطه L ، $|AB|$ را به نسبت $|AL| : |AB| = \lambda$ تقسیم می‌کند. بنابراین

$$l = \frac{a + \lambda b}{\lambda + 1} \text{ و از آن جا}$$

$$0 = a(a, b) - ba^2 + \lambda ab^2 - \lambda b(a, b)$$

$$\lambda = \frac{a[ab - (a, b)]}{b[ab - (a, b)]} = \frac{a}{b} \text{ یعنی سپس}$$

$$ab - (a, b) = ab(1 - \cos \hat{C}) > 0$$

و سرانجام

$$l = \frac{a + \frac{a}{b}b}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{ab - ba}{a + b}$$

مثال ۱۴.۲.۳. مطلوب است محاسبه طول نیمساز $[CL]$ در مثلث ABC ، بر حسب طول ضلع‌های $a = |BC|$ ، $b = |AC|$ و $c = |AB|$.حل. فرض می‌کنیم $\vec{a} = \vec{CB}$ و $\vec{b} = \vec{CA}$ ، یعنی $a = |\vec{a}|$ و $b = |\vec{b}|$.

با توجه به نتیجه مثال ۱۱.۲.۳، داریم:

$$\vec{CL} = \frac{ab + ba}{a + b}$$

بنابراین

$$|\vec{CL}|^2 = \frac{1}{(a+b)^2} (ab + ba)^2 = \frac{1}{(a+b)^2} [(ab)^2 + (ba)^2 +$$

$$+ 2(ab, ba)] = \frac{1}{(a+b)^2} [2a^2b^2 + 2ab(a, b)] =$$

$$= \frac{2ab}{(a+b)^2} [ab + (a, b)]$$

با توجه به دستور (۳.۸): $(a, b) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$ و در نتیجه

$$|\vec{CL}|^2 = \frac{2ab}{(a+b)^2} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2} = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

مثال ۱۳.۲.۳. ثابت کنید، اگر در مثلث ABC ، دو نیمساز داخلی، طولی برابر داشته باشند، مثلث متساوی الساقین است.
حل. $[CL]$ و $[AM]$ را، نیمسازهای زاویه های C و A می گیریم.
با توجه به نتیجه مثال قبل، داریم:

$$|CL|^2 = \frac{ab - abc^2}{(a+b)^2}, |AM|^2 = \frac{bc - bca^2}{(b+c)^2}$$

بنابراین، به شرط $|CL| = |AM|$ ، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \frac{a - ac^2}{(a+b)^2} &= \frac{C - ca^2}{(b+c)^2} \Rightarrow a - c = \\ &= \frac{ac[c(b+c)^2 - a(a+b)^2]}{(a+b)^2(b+c)^2} = \\ &= \frac{ac[c^3 - a^3 + 2b(c^2 - a^2) + b^2(c - a)]}{(a+b)^2(b+c)^2} = \\ &= ac(c-a) \frac{c^2 + ac + a^2 + 2b(c+a) + b^2}{(a+b)^2(b+c)^2} \end{aligned}$$

از آنجا

$$(a-c) \left[1 + \frac{ac(c^2 + ac + a^2 + 2bc + 2ab + b^2)}{(a+b)^2(b+c)^2} \right] = 0$$

و بنابراین $a = c$.

مثال ۱۴.۲.۳. در مثلث ABC ، میانه $[CM]$ بر نیمساز $[AL]$ عمود است و $|CM| : |AL| = n$. زاویه A را محاسبه کنید.

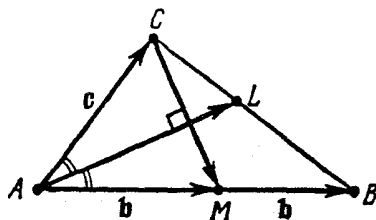
حل. فرض می کنیم: $\vec{AB} = 2\mathbf{b}$ ، $\vec{AC} = \mathbf{c}$ ، $b = |\mathbf{b}|$ ، $c = |\mathbf{c}|$ و $A = (\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}})$ در این صورت

$$\vec{CM} = \mathbf{b} - \mathbf{c}, \vec{AL} = \frac{2bc + C \cdot 2\mathbf{b}}{2b + c}$$

(نتیجه مثال ۱۱.۲.۳ را ببینید). بنا بر فرض $(\vec{AL}, \vec{CM}) = 0$ ، یعنی

$$0 = (2bc + 2cb, b - c) = 2[cb^2 - bc^2 + (b - c)(b, c)] = \\ = 2(b - c)bc(1 + \cos \hat{A})$$

و چون $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ ، خواهیم داشت: $bc(1 + \cos \hat{A}) \neq 0$ و بنا بر این $b = c$.



شکل ۱۱.۳

[درضمن، این نتیجه را، از این جا هم می توانستیم به دست آوریم که، چون در مثلث ACM ، نیمساز و ارتفاع وارد از رأس A برهم منطبق اند (شکل ۱۱.۳)،

بنا بر این مثلث ACM متساوی الساقین است و $|AC| = |AM|$ به این ترتیب

$$\vec{AL} = \frac{2}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad |\vec{AL}|^2 = \frac{4}{9}[\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2(\mathbf{b}, \mathbf{c})] =$$

$$= \frac{4}{9}(2b^2 + 2b^2 \cos \hat{A}) = \frac{8}{9}b^2(1 + \cos \hat{A}),$$

$$|\vec{CM}|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) =$$

$$= 2b^2 - 2b^2 \cos \hat{A} = 2b^2(1 - \cos \hat{A})$$

از آن جا

$$n^2 = |CM|^2 : |AL|^2 = \frac{9(1 - \cos \hat{A})}{4(1 + \cos \hat{A})}$$

و سرانجام

$$\cos \hat{A} = \frac{9 - 4n^2}{9 + 4n^2}$$

مثال ۰۱۵۰۲۰۳ در مثلث ABC داریم:

$$|AC| = ۱, |BC| = ۲, \hat{C} = \arccos \frac{3}{4}$$

بردارهای ارتفاع‌های $\vec{CD} = \mathbf{h}$ و $\vec{AE} = \mathbf{H}$ را، بر حسب بردارهای $\mathbf{a} = \vec{CA}$ و $\mathbf{b} = \vec{CB}$ بیان کنید (شکل ۱۲.۳).

حل. بردارهای $\mathbf{h} - \mathbf{a} = \vec{AD}$ و $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \vec{AB} \neq \mathbf{0}$ هم‌راستا هستند.

بنابراین، عددی مانند t وجود دارد، به نحوی که $\mathbf{h} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ مقدار t را با توجه به شرط عمود بودن بردارهای $\vec{CD}$ و $\vec{AB}$ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{CD}, \vec{AB}) = (\mathbf{h}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{a}^2 + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 \end{aligned}$$

از آن جا

$$\begin{aligned} t &= \frac{\mathbf{a}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{a(a - b \cos \hat{C})}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}} = \\ &= \frac{1 - 1 \times 2 \times \frac{3}{4}}{1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{3}{4}} = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

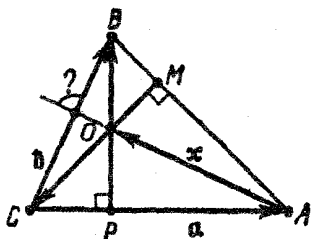
چون $a = |\mathbf{a}| = ۱$ و $b = |\mathbf{b}| = ۲$ ، بنابراین

$$h = a - \frac{1}{4}(b-a) = \frac{5a-b}{4}$$

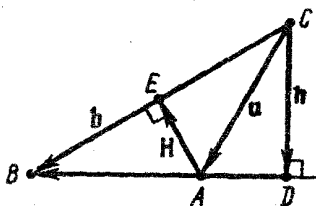
به همین ترتیب، بردار $H = \vec{AC} + \vec{CE}$ را می‌توان به صورت $H = -a + \lambda b$ نشان داد. عدد λ از شرط $(H, b) = 0$ به دست می‌آید:

$$-(a, b) + \lambda b^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{(a, b)}{b^2} = \frac{a \cos \hat{C}}{b} = \frac{3}{8}$$

و به این ترتیب: $H = -a + \frac{3}{8}b$.



شکل ۱۳.۳



شکل ۱۴.۳

مثال ۱۶۰۲.۳. ثابت کنید، ارتفاع‌های مثلث، در یک نقطه به هم

می‌رسند.

حل. ارتفاع‌های $[BP]$ و $[CM]$ را در مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل ۱۳.۳) و نقطه برخورد آن‌ها را O می‌نامیم. برای اثبات قضیه، لازم و کافی است ثابت کنیم، خط راست (AO) بر خط راست (BC) عمود است؛ یعنی

$$(\vec{AO}, \vec{BC}) = 0$$

فرض می‌کنیم: $a = \vec{CA}$, $b = \vec{CB}$ و $x = \vec{AO}$. از آن‌جا

$$\vec{AB} = b - a, \quad \vec{OC} = -x - a, \quad \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB} = b - x - a$$

بنابراین به تعریف ارتفاع $(\vec{OC}, \vec{AB}) = 0$ ، یعنی $(-x - a, b - a) = 0$.

بنا بر این

$$(x, a) - (x, b) = (a, b) - a^2$$

به همین ترتیب $(\vec{OB}, \vec{CA}) = 0$ ، یعنی

$$(b - x - a, a) = 0$$

به این ترتیب $(x, a) = (a, b) - a^2$ ؛ از آن جا

$$(x, a) = (x, a) - (x, b)$$

بنا بر این $(x, b) = 0$ ، یعنی $(\vec{AO}, \vec{BC}) = 0$.

مثال ۱۷۰۲۰۳. E و F را، به ترتیب، وسط یال‌های $[AD]$ و $[CB]$ ،

در چهاروجهی $ABCD$ می‌گیریم. ثابت کنید، بردارهای $\vec{AD}$ ، $\vec{FE}$ و $\vec{CB}$ ،

دو به دو برهم عمودند و $|FE| = |AD| : \sqrt{2}$.

حل. قرار می‌گذاریم: $\vec{a} = \vec{DA}$ ، $\vec{b} = \vec{DB}$ ، $\vec{c} = \vec{DC}$ و

$$a = |a| = |b| = |c|$$

از آن جا که $\widehat{(a, b)} = \widehat{(a, c)} = \widehat{(b, c)} = 60^\circ$ ، بنا بر این

$$(a, b) = (a, c) = (b, c) = \frac{1}{2}a^2$$

و در نتیجه

$$(\vec{AD}, \vec{CB}) = (-a, b - c) = -(a, b) + (a, c) = 0$$

یعنی $\vec{AD} \perp \vec{CB}$ ، و به جز آن

$$\vec{FE} = \vec{FB} + \vec{BD} + \vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{CB} - \vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{DA} =$$

$$= \frac{1}{2}(b - c) - b + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(a - b - c)$$

از آن جا

$$\begin{aligned}
 |FE| &= \frac{1}{\sqrt{3}} |\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - 2(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{c})} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\mathbf{a}^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} |AD|
 \end{aligned}$$

و سرانجام

$$(\vec{FE}, \vec{AD}) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, -\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{3}} [-\mathbf{a}^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})] = 0,$$

$$(\vec{FE}, \vec{CB}) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2] = 0$$

یعنی $\vec{FE} \perp \vec{CB}$ و $\vec{FE} \perp \vec{AD}$ مثال ۱۸.۲.۳. E و F را وسط یال‌های $[AD]$ و $[BC]$ از هرم $ABCD$ می‌گیریم. ثابت کنید، برابری‌های

$$|BD| = |AC|, \quad |AB| = |CD|$$

تنها وقتی به طور هم‌زمان برقرارند که پاره‌خط راست $[EF]$ ، بر هر دو یال $[BC]$ و $[AD]$ عمود باشد.حل. $\vec{a} = \vec{ED}$ ، $\vec{b} = \vec{EF}$ و $\vec{c} = \vec{FC}$ را، به عنوان بردارهای پایه

در نظر می‌گیریم. در این صورت، داریم:

$$\vec{BD} = \vec{BF} + \vec{FE} + \vec{ED} = \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

$$\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

بنابراین، تنها وقتی برابری $|BD| = |AC|$ برقرار است که داشته باشیم:

$$(\mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$$

(مثال ۸.۱.۳ را ببینید) و یا $(\mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{c}) = 0$. به همین ترتیب

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{CD} = -\mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

و برابری $|AB| = |CD|$ ، هم ارز است با $(\mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0$. بنابراین

$$\begin{cases} |BD| = |AC|, \\ |AB| = |CD| \end{cases} \iff \begin{cases} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \\ \mathbf{b} \perp \mathbf{c} \end{cases}$$

مثال ۱۹.۲.۳. E و M را وسط‌یال‌های $[AB]$ و $[AC]$ در چهاروجهی

منتظم $ABCD$ و N را محل برخورد میانه‌های وجه BCD می‌گیریم. زاویه بین بردارهای $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{MN}$ را پیدا کنید.

حل. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{c} = \overrightarrow{DC}$ و $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = a$ می‌گیریم.

در این صورت

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2}a^2, \quad \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \quad \overrightarrow{DN} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

و از آنجا

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = -\frac{1}{6}(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\begin{aligned} (6|\overrightarrow{MN}|)^2 &= (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}, 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 9a^2 + 4b^2 + c^2 - \\ &- 12(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 6(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - 4(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 14a^2 - 10(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 9a^2, \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{a}{2}, \quad |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

و با توجه به دستور (۳.۱۴)

$$(\vec{DE}, \vec{MN}) = -\frac{1}{12}(a+b, 3a-2b+c) =$$

$$= -\frac{1}{12}(3a^2 + (a, b) + (a, c) - 2b^2 + (b, c)) = -\frac{5a^2}{24}$$

به این ترتیب، اگر فرض کنیم $\varphi = (\vec{DE}, \vec{MN})$ ، آن وقت

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{DE}, \vec{MN})}{|\vec{DE}| \cdot |\vec{MN}|} = \frac{-\frac{5a^2}{24}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{5}{6\sqrt{3}}$$

یعنی $\varphi = 180^\circ - \arccos \frac{5}{6\sqrt{3}}$

مثال ۲۰.۳. در چهاروجهی منتظم $ABCD$ ، نقطه‌های E و F را وسط یال‌های $[AD]$ و $[BC]$ ، و نقطه‌های M و N را روی پاره‌خط‌های راست $[EF]$ و $[CD]$ در نظر گرفته‌ایم و می‌دانیم:

$$\alpha = \widehat{MNC} = 45^\circ, \quad \beta = \widehat{NME} = 60^\circ$$

نسبت‌های $|FM| : |ME|$ و $|CN| : |ND|$ را پیدا کنید.

حل. $\vec{b} = \vec{EF}$ ، $\vec{a} = \vec{ED}$

$\vec{c} = \vec{FC}$ را بردارهای پایه‌می گیریم

(شکل ۱۴.۳). $d = |\vec{a}|$ فرض

کنید. بنابر نتیجه مثال ۱۷.۲.۳،

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، دو به دو برهم

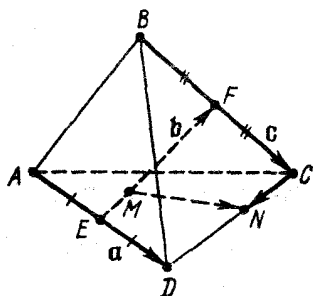
عمودند. پس

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0,$$

$$|\vec{c}| = d, \quad |\vec{b}| = d\sqrt{2}$$

با توجه به فرض، عددهای λ و μ

وجود دارند، به نحوی که



$$\vec{CN} = \lambda \vec{CD} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}), \quad \vec{MF} = \mu \vec{EF} = \mu \mathbf{b}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{MF} + \vec{FC} + \vec{CN} = \lambda \mathbf{a} + (\mu - \lambda) \mathbf{b} + (1 - \lambda) \mathbf{c}, \\ |\vec{MN}|^2 &= (\vec{MN}, \vec{MN}) = \lambda^2 \mathbf{a}^2 + (\mu - \lambda)^2 \mathbf{b}^2 + (1 - \lambda)^2 \mathbf{c}^2 + \\ &+ 2\lambda(\mu - \lambda)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 2\lambda(1 - \lambda)(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + 2(\mu - \lambda)(1 - \lambda)(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \\ &= \lambda^2 d^2 + (\mu - \lambda)^2 2d^2 + (1 - \lambda)^2 d^2 = d^2[(\lambda - 1)^2 + \\ &+ 2(\mu - \lambda)^2 + \lambda^2], \end{aligned}$$

$$\vec{CD} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad |\vec{CD}| = |\vec{AD}| = 2|\mathbf{a}| = 2d$$

به جز این‌ها

$$\begin{aligned} (\vec{MN}, \vec{CD}) &= (\lambda \mathbf{a} + (\mu - \lambda) \mathbf{b} + (1 - \lambda) \mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}) = \\ &= \lambda \mathbf{a}^2 - (\mu - \lambda) \mathbf{b}^2 - (1 - \lambda) \mathbf{c}^2 = (2\lambda - 2\mu - 1) d^2, \\ |\vec{EF}| &= |\mathbf{b}| + d\sqrt{2}, \quad (\vec{MN}, \vec{EF}) = (\lambda \mathbf{a} + (\mu - \lambda) \mathbf{b} + \\ &+ (1 - \lambda) \mathbf{c}, \mathbf{b}) = (\mu - \lambda) \mathbf{b}^2 = 2(\mu - \lambda) d^2 \end{aligned}$$

با توجه به فرض داریم:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \widehat{MNC} = \cos(\vec{MN}, \vec{CN}) = \cos(\vec{MN}, \vec{CD}) = \\ &= \frac{(\vec{MN}, \vec{CD})}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{2\lambda - 2\mu - 1}{2\sqrt{\lambda^2 + 2(\mu - \lambda)^2 + (\lambda - 1)^2}}, \\ \cos \beta &= \cos \widehat{NME} = -\cos \widehat{NMF} = -\cos(\vec{MN}, \vec{EF}) = \\ &= -\frac{(\vec{MN}, \vec{EF})}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{EF}|} = \frac{2(\lambda - \mu)}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + 2(\mu - \lambda)^2 + (\lambda - 1)^2}} \quad (3.16) \end{aligned}$$

از این دو رابطه به دست می‌آید:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{2\lambda - 2\mu - 1}{2\sqrt{2}(\lambda - \mu)};$$

$$\mu = \frac{\lambda(4\cos\beta - 2\sqrt{2}\cos\alpha) - \cos\beta}{2\cos\beta - 2\sqrt{2}\cos\alpha},$$

$$\lambda - \mu = \frac{(1 - 2\lambda)\cos\beta}{2\cos\beta - 2\sqrt{2}\cos\alpha}$$

اکنون می‌توان مجهول λ را از معادله (۳.۱۶) محاسبه کرد:

$$\cos\beta = \frac{\frac{(1 - 2\lambda)\cos\beta}{\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha}}{\sqrt{2\lambda^2 + \frac{(1 - 2\lambda)^2\cos^2\beta}{(\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2} + 2(\lambda - 1)^2}} \quad (3.17)$$

با مجذور کردن دو طرف رابطه (۳.۱۷) و با توجه به $\cos^2\beta \neq 0$ به دست می‌آید:

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 2 = \frac{(1 - 2\lambda)^2\sin^2\beta}{(\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2}$$

یعنی

$$\begin{aligned} (1 - 2\lambda)^2 = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 &= \left(\frac{\sin^2\beta}{(\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2} - 1 \right)^{-1} = \\ &= \frac{(\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2}{\sin^2\beta - (\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2} \end{aligned}$$

عددهای $1 - 2\lambda$ و $\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha$ هم علامت‌اند، بنابراین

$$1 - 2\lambda = \frac{\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\beta - (\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2}}$$

و نسبت‌هایی که به دنبال آن‌ها برویم، برابرند با

$$\begin{aligned} \frac{|CN|}{|ND|} &= \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{1 - (1 - 2\lambda)}{1 + (1 - 2\lambda)} = \\ &= \frac{\sqrt{\sin^2\beta - (\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2} - (\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{\sin^2\beta - (\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)^2} + (\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha)}; \end{aligned}$$

$$\frac{|FM|}{|ME|} = \frac{\mu}{1-\mu} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2 \beta - (\cos \beta - \sqrt{2} \cos \alpha)^2} - (2 \cos \beta - \sqrt{2} \cos \alpha)}{\sqrt{\sin^2 \beta - (\cos \beta - \sqrt{2} \cos \alpha)^2} + (2 \cos \beta - \sqrt{2} \cos \alpha)}$$

و به ازای $\alpha = 45^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ ، به دست می آید:

$$|CN| : |ND| = 3 + 2\sqrt{2} \quad , \quad |FM| : |ME| = 1$$

مثال ۲۱۰.۲.۳. طول یال چهاروجهی منتظم $ABCD$ برابر است با

۲d. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که از رأس‌های A و D ، نقطه F وسط یال $[BC]$ و نقطه K مرکز وجه ADC می‌گذرد.

حل. همان پایه مسئله قبل را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴.۳). فرض

کنید O مرکز کره باشد:

$$\vec{OF} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

(x, y, z نامعلوم اند). اگر شعاع کره مورد نظر باشد، داریم:

$$\vec{OA} = \vec{OF} + \vec{FA} = (x-1)\mathbf{a} + (y-1)\mathbf{b} + z\mathbf{c},$$

$$\vec{OD} = \vec{OF} + \vec{FD} = (x+1)\mathbf{a} + (y-1)\mathbf{b} + z\mathbf{c},$$

$$\vec{CK} = \frac{2}{3}\vec{CE} = \frac{2}{3}(-\mathbf{b}-\mathbf{c}),$$

$$\vec{OK} = \vec{OF} + \vec{FC} + \vec{CK} = x\mathbf{a} + \left(y - \frac{2}{3}\right)\mathbf{b} + \left(z + \frac{1}{3}\right)\mathbf{c}$$

بنا به فرض $|\vec{OA}|^2 = |\vec{OD}|^2 = |\vec{OK}|^2 = |\vec{OF}|^2 = R^2$ ، و به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$(x-1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2 = w^2,$$

$$(x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2 = w^2,$$

$$x^2 + 2\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = w^2,$$

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = w^2$$

که در آن‌ها $w = \frac{R}{d}$. اگر معادله دوم را از معادله اول کم کنیم، به دست

می‌آید: $x = 0$. معادله چهارم را از معادله اول کم می‌کنیم، به معادله

$1 - 2x - 4y = 0$ می‌رسیم، که از آن نتیجه می‌شود: $y = \frac{3}{4}$. با توجه

به مقدارهای x و y ، معادله‌های دوم و سوم، به صورت

$$\frac{9}{8} + z^2 = w^2, \quad \frac{1}{72} + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = w^2$$

درمی‌آیند که، از آن‌ها، به دست می‌آید: $z = \frac{3}{4}$. در نتیجه

$$R = dw = d\sqrt{\frac{9}{8} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}d$$

مثال ۲۲.۲.۳. مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه ABC ، قاعده

منشور $ABCA_1B_1C_1$ است و داریم: $\hat{C} = 90^\circ$ و $|AC| = |BC| = a$.

رأس‌های M و N از چهاروجهی $MNPQ$ روی خط راست $(CA)_1$ و

رأس‌های P و Q از آن، روی خط راست $(AB)_1$ قرار دارند. مطلوب است:

الف) حجم منشور؛ ب) حجم چهاروجهی.

حل. فرض می‌کنیم: $\vec{a} = \vec{CA}$ ، $\vec{b} = \vec{CB}$ ، $\vec{c} = \vec{CC_1}$ (شکل ۱۵.۳)،

$|r| = |PQ|$ و $h = |\vec{c}|$. بنا به فرض

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = a$$

E و F را وسط پاره‌خط‌های راست $[MN]$ و $[PQ]$ می‌گیریم. در مثال

۱۷.۲.۳ ثابت کردیم:

$$|MN| = r = |PQ|, \quad |FE| = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

$$0 = (\vec{PQ}, \vec{MN}) = (\vec{EF}, \vec{MN}) = (\vec{EF}, \vec{PQ})$$

بنابراین

$$(\vec{AB}_1, \vec{CA}_1) = (\vec{EF}, \vec{A_1C}) = (\vec{EF}, \vec{AB}_1) = 0 \quad (3.18)$$

الف) از شرط $(\vec{AB}_1, \vec{CA}_1) = (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{c}) = 0$ داریم:
یعنی $-\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 = 0$ و $h = a$ و $-a^2 + h^2 = 0$ ، حجم منشور چنین می شود:

$$V_1 = hS_{ABC} = h \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$$

ب) λ و μ را عددی می گیریم که، برای آن ها، داشته باشیم:

$$\vec{CE} = \lambda \vec{CA}_1 = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \quad (\vec{CA}_1 \text{ و } \vec{CE} \text{ هم راستای})$$

$$\vec{AF} = \mu \vec{AB}_1 = \mu(-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\vec{AB}_1 \text{ و } \vec{AF} \text{ هم راستای})$$

بنابراین

$$\vec{EF} = \vec{EC} + \vec{CA}_1 + \vec{AF} = (1 - \lambda - \mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + (\mu - \lambda)\mathbf{c}$$

و از رابطه (3.18) به دست می آید:

$$0 = (\vec{EF}, \vec{CA}_1) = [(1 - \lambda - \mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + (\mu - \lambda)\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{c}] =$$

$$= (1 - \lambda - \mu)\mathbf{a}^2 - (\mu - \lambda)\mathbf{c}^2 = (1 - 2\lambda)\mathbf{a}^2,$$

$$0 = (\vec{EF}, \vec{AB}_1) = [(1 - \lambda - \mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} +$$

$$+ (\mu - \lambda)\mathbf{c}, -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}] = (\lambda + \mu - 1)\mathbf{a}^2 + \mu\mathbf{b}^2 +$$

$$+ (\mu - \lambda)\mathbf{c}^2 = (3\mu - 1)\mathbf{a}^2$$

یعنی $\lambda = \frac{1}{3}$ و $\mu = \frac{1}{3}$. بنابراین $\vec{EF} = \frac{1}{6}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c})$ و

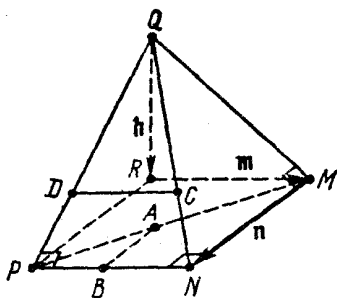
$$|\vec{EF}| = \frac{1}{6}|\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}| = \frac{1}{6}\sqrt{(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c})} =$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{a^2 + 4b^2 + c^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

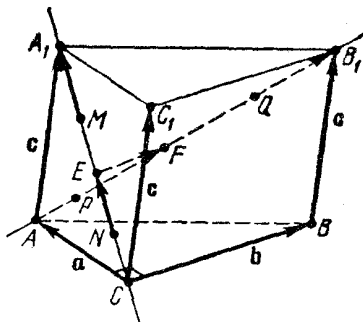
از آنجا

$r = \sqrt{2} |EF| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ، حجم چهاروجهی چنین است:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot r \sqrt{\frac{2}{3} \cdot r \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{r^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{108}$$



شکل ۱۶.۳



شکل ۱۵.۳

مثال ۲۳.۲۰۳. زاویه‌های QMN ، MNP و NPQ در هرم $MNPQ$ قائمه‌اند. رأس‌های A ، B ، C و D از چهاروجهی منتظم، بریال‌های $[MP]$ ، $[NP]$ ، $[NQ]$ و $[PQ]$ قرار گرفته‌اند. خط‌های راست (AB) و (MN) موازی‌اند. نسبت حجم‌های چهاروجهی و هرم را پیدا کنید.

حل. R را پای عمود وارد از رأس Q بر صفحه MNP می‌گیریم (شکل ۱۶.۳). فرض می‌کنیم: $\vec{h} = \vec{QR}$ ، $\vec{m} = \vec{RM}$ ، $\vec{n} = \vec{MN}$ ؛ بنابراین

$$(\vec{h}, \vec{m}) = (\vec{h}, \vec{n}) = 0; (\vec{m}, \vec{n}) = (\vec{MQ} + \vec{h}, \vec{n}) = (\vec{MQ}, \vec{MN}) = 0$$

(زیرا $\widehat{QMN} = 90^\circ$). بنابراین، بردارهای $\vec{h}$ و $\vec{m}$ و $\vec{n}$ ، دو به دو برهم عمودند. بنابه فرض داریم: $(\vec{PN}, \vec{PQ}) = 0$. چون $(\vec{PN}, \vec{h}) = 0$

خواهیم داشت:

$$(\vec{PN}, \vec{PR}) = (\vec{PN}, \vec{PQ} + \vec{h}) = 0$$

همچنین، بنا به فرض $(PN, \vec{n}) = 0$. بنا براین، در چهارضلعی $PRMN$ ، سه زاویه RMN ، MNP و NPR قائمه‌اند؛ یعنی $PRMN$ ، یک مستطیل است:

$$\vec{PN} = \vec{RM} = \vec{m}, \quad \vec{RP} = \vec{MN} = \vec{n}$$

چون $(AB) \parallel (MN)$ ، عددی مانند x وجود دارد، به نحوی که

$$\vec{PB} = x\vec{PN} = x\vec{m}, \quad \vec{PA} = x\vec{PM} = x(\vec{m} - \vec{n}), \quad \vec{AB} = x\vec{n}$$

نقطه‌های C و D ، به ترتیب، بر یال‌های $[QN]$ و $[QP]$ قرار دارند،

بنا براین، عددهای y و z وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$\vec{QC} = y\vec{QN} = y(\vec{h} + \vec{m} + \vec{n}), \quad \vec{QD} = z\vec{QP} = z(\vec{h} + \vec{n})$$

بنابر ویژگی یال‌های متناظر در چهاروجهی منتظم: $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 0$ (مثال ۱۷۰.۲.۳) بنا براین

$$[x\vec{n}, (z-y)\vec{h} - y\vec{m} + (z-y)\vec{n}] = x(z-y)|\vec{n}|^2 = 0$$

چون $|AB| = x|\vec{n}| \neq 0$ ، بنا براین (شکل ۱۶.۳)، $y = z$ ، که به معنای موازی بودن خط‌های راست (CD) و (NP) است.

اکنون، بردارهای یال‌های چهاروجهی $ABCD$ را، بر حسب بردارهای

پایه $\{\vec{h}, \vec{m}, \vec{n}\}$ مشخص می‌کنیم:

$$\vec{AB} = x\vec{n}, \quad \vec{CD} = -y\vec{m}, \quad \vec{AC} = \vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QC} =$$

$$= (y-1)\vec{h} + (y-x)\vec{m} + (x+y-1)\vec{n},$$

$$\vec{BD} = \vec{BP} + \vec{PQ} + \vec{QD} = (z-1)\vec{h} - x\vec{m} + (z-1)\vec{n} =$$

$$= (y-1)\vec{h} - x\vec{m} + (y-1)\vec{n},$$

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = (y-1)\vec{h} - x\vec{m} + (x+y-1)\vec{n},$$

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (y-1)\vec{h} + (y-x)\vec{m} + (y-1)\vec{n}$$

چون $ABCD$ ، چهاروجهی منتظم است، بنا براین، یال‌های آن، طولی برابر

دارند و، در نتیجه، با فرض $a = |\vec{AB}|$ ، $n = |\mathbf{n}|$ ، $m = |\mathbf{m}|$ ، $h = |\mathbf{h}|$ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$a^2 = x^2 n^2, \quad a^2 = y^2 m^2,$$

$$a^2 = (y-1)^2 h^2 + (y-x)^2 m^2 + (x+y-1)^2 n^2,$$

$$a^2 = (y-1)^2 h^2 + x^2 m^2 + (y-1)^2 n^2,$$

$$a^2 = (y-1)^2 h^2 + x^2 m^2 + (x+y-1)^2 n^2$$

اگر معادله پنجم را از معادله سوم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$(y-x)^2 = x^2 \iff y(y-2x) = 0$$

چون $|CD| = |y\mathbf{m}| \neq 0$ ، بنابراین $y \neq 0$ و در نتیجه $y = 2x$. معادله چهارم را از معادله سوم کم می‌کنیم، به دست می‌آید: $x(x+2y-2) = 0$ ؛ چون $x \neq 0$ ، بنابراین داریم:

$$x + 2y - 2 = 0 \iff 5x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{5}, y = \frac{4}{5}$$

به این ترتیب، برای a, h, m, n ، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$a^2 = \frac{4n^2}{25}, \quad a^2 = \frac{16m^2}{25}, \quad a^2 = \frac{h^2}{25} + \frac{4m^2}{25} + \frac{n^2}{25}$$

از آنجا: $n = \frac{5}{4}a$ ، $m = \frac{2}{5}a$ و $h = \frac{5}{4}a$ ؛ خواهیم داشت:

$$V_{ABCD} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}, \quad V_{MNPQ} = \frac{1}{3} h \left(\frac{1}{2} mn \right) = \frac{125}{48\sqrt{2}} a^3$$

و نسبت حجم‌ها، چنین می‌شود:

$$V_{ABCD} : V_{MNPQ} = 8 : 125$$

مثال ۲۴.۲.۳. مستطیل $ABCD$ و نقطه M مفروض‌اند. ثابت کنید:

$$(\vec{MA}, \vec{MC}) = (\vec{MB}, \vec{MD}) \quad (\text{الف})$$

$$|\vec{MA}|^2 + |\vec{MC}|^2 = |\vec{MB}|^2 + |\vec{MD}|^2 \quad (\text{ب})$$

$$\vec{AM} = \mathbf{x}, \vec{BC} = \vec{AD} = \mathbf{b}, \vec{AB} = \vec{DC} = \mathbf{a} \quad (\text{حل. الف}) \text{ فرض کنید:}$$

بنا بر این $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ و

$$(\vec{MA}, \vec{MC}) - (\vec{MB}, \vec{MD}) = (-\mathbf{x}, -\mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{b}) -$$

$$-(-\mathbf{x} + \mathbf{a}, -\mathbf{x} + \mathbf{b}) = \mathbf{x}^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{a}) - (\mathbf{x}, \mathbf{b}) -$$

$$-[\mathbf{x}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{x}) - (\mathbf{x}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})] = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

(ب) با توجه به نتیجه الف داریم:

$$|\vec{MA}|^2 + |\vec{MC}|^2 - |\vec{MB}|^2 - |\vec{MD}|^2 = [|\vec{MA}|^2 -$$

$$-2(\vec{MA}, \vec{MC}) + |\vec{MC}|^2] - [|\vec{MB}|^2 - 2(\vec{MB}, \vec{MD}) +$$

$$+ |\vec{MD}|^2] = \vec{AC}^2 - \vec{BD}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 = 4(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

مثال ۲۵.۲.۳. نقطه‌های A, B, C و D ، طوری در فضا (یا صفحه)

قرار گرفته‌اند که، برای هر نقطه M از فضا (یا صفحه) داریم:

$$(\vec{AM}, \vec{CM}) \neq (\vec{BM}, \vec{DM})$$

ثابت کنید $ABCD$ ، متوازی الاضلاع است.

$$\text{حل. قرار می‌گذاریم: } \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{AD}, \vec{r} = \vec{AM}$$

$$\text{پس } \vec{CM} = \vec{r} - \vec{c}, \vec{BM} = \vec{r} - \vec{b}, \vec{DM} = \vec{r} - \vec{d}. \text{ بنا به فرض، برای هر}$$

بردار $\mathbf{r}$ (از صفحه یا فضا) داریم: $(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{c}) \neq (\mathbf{r} - \mathbf{b}, \mathbf{r} - \mathbf{d})$ ، یعنی

$$(\mathbf{r}, \mathbf{d} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \neq (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \quad (3.19)$$

اکنون ثابت می‌کنیم، بردار $\mathbf{a} = \mathbf{d} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ ، برابر صفر است. برعکس،

$$\text{فرض می‌کنیم } \mathbf{a} \neq 0. \text{ بنا بر این، بردار } \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{d})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \text{ باید در برابری}$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}, \mathbf{d})$$

صدق کند که با (۳.۱۹) متناقض است. به این ترتیب $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ؛ یعنی

$$\vec{AB} = \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = \vec{AC} - \vec{AD} = \vec{DC}$$

که به معنای متوازی الاضلاع بودن $ABCD$ است. اگر در (۳.۱۹) قرار دهیم $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ، به دست می آید: $(\mathbf{b}, \mathbf{d}) \neq 0$ ، یعنی $ABCD$ ، مستطیل نیست (با مثال قبل مقایسه کنید).

مثال ۳.۲۶.۲۰۳ O را مرکز n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ و M را نقطه ای دلخواه می گیریم. اگر $|OM| = l$ و $|OA_1| = R$ باشد، مقدار زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} f(M) &= f(A_1, A_2, \dots, A_n; M) = \\ &= |A_1 M|^2 + |A_2 M|^2 + \dots + |A_{n-1} M|^2 + |A_n M|^2 \\ \text{حل. } \mathbf{r}_i &= \vec{OA_i} \text{ و } \mathbf{r} = \vec{OM} \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{) می گیریم. در نتیجه} \\ &\text{و } |\mathbf{r}_i| = R, |\mathbf{r}| = l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_i M|^2 &= |\vec{OM} - \vec{OA_i}|^2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}_i^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \\ &= l^2 + R^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

از آن جا

$$\begin{aligned} f(M) &= n(l^2 + R^2) - 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_n) = n(l^2 + R^2) \\ \text{زیرا، مجموع } \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_n, \text{ شعاع حامل های رأس های } n \text{ ضلعی منتظم،} \\ \text{از مرکز آن، برابر صفر است.} \end{aligned}$$

مثال ۳.۲۷.۲۰۳ یک m ضلعی منتظم و یک n ضلعی منتظم، طوری قرار گرفته اند که فاصله بین مرکزهای آنها، برابر d شده است. شعاع دایره های محیطی این دو چندضلعی، به ترتیب، برابر است با r و R . همه رأس های m ضلعی را به همه رأس های n ضلعی وصل کرده ایم. مجموع مجذورهای پاره خط های راست حاصل را پیدا کنید.

حل. O و O' را مرکز دایره های محیطی و A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) و B_j ($j = 1, 2, \dots, m$) را، به ترتیب، رأس های n ضلعی و m ضلعی می گیریم.

با توجه به نتیجه مثال قبل، برای هر $m, j = 1, 2, \dots, m$ داریم:

$$f(B_j) = |B_j A_1|^2 + |B_j A_2|^2 + \dots + |B_j A_n|^2 = n(|OB_j|^2 + R^2)$$

و مجموع مورد نظر، چنین می شود:

$$\begin{aligned} \sigma &= f(B_1) + f(B_2) + \dots + f(B_m) = \\ &= mnR^2 + n(|B_1 O|^2 + |B_2 O|^2 + \dots + |B_m O|^2) = \\ &= mnR^2 + nf(B_1 + B_2, \dots, B_m; O) \end{aligned}$$

که با توجه به نتیجه مثال قبل، برای m ضلعی $B_1 B_2 \dots B_{m-1} B_m$ خواهیم داشت:

$$f(B_1 + B_2, \dots, B_m; O) = m(|OO'|^2 + r^2)$$

به این ترتیب، سرانجام به دست می آید:

$$\sigma = mn(R^2 + d^2 + r^2)$$

مثال ۲۸۰.۲۰۳. اگر $\hat{A}, \hat{B}$ و $\hat{C}$ را، زاویه های مثلث ABC فرض

کنیم، درستی این نابرابری ها را ثابت کنید:

$$۱) \quad \cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} \geq -\frac{3}{2};$$

$$۲) \quad \cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} \leq \frac{3}{2};$$

$$۳) \quad \sin \frac{\hat{A}}{2} + \sin \frac{\hat{B}}{2} + \sin \frac{\hat{C}}{2} \leq \frac{3}{2}$$

حل. e_1, e_2, e_3 را بردارهای یکه می گیریم و فرض می کنیم:

$$\alpha = (\hat{e}_1, \hat{e}_2), \beta = (\hat{e}_2, \hat{e}_3), \gamma = (\hat{e}_3, \hat{e}_1)$$

از تبدیل نابرابری روشن $(e_1 + e_2 + e_3)^2 \geq 0$ به دست می آید:

$$3 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \geq 0$$

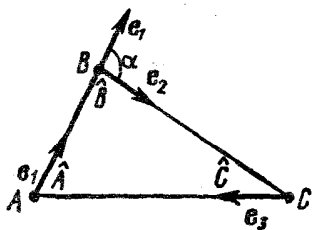
$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \geq -\frac{3}{2} \quad (3.20)$$

(۱) اگر $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ ، زاویه‌های يك مثلث باشند، آن وقت

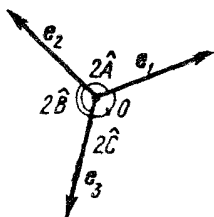
$$\hat{A} > 0^\circ, \hat{B} > 0^\circ, \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} > 0^\circ$$

بدون آن که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان $\hat{A} \leq \hat{B} \leq 90^\circ$ گرفت. بردارهای e_1 و e_2 و e_3 را طوری در نظر می‌گیریم که e_3 از دوران e_1 به اندازه زاویه $2\hat{A}$ و e_2 از دوران e_3 به اندازه زاویه $2\hat{B}$ (در همان جهت دوران قبلی) به دست آید (شکل ۱۷.۳). بنابراین $\alpha = 2\hat{A}$ ، $\beta = 2\hat{B}$ و به شرط $\gamma = 2\hat{C}$ ، $\hat{C} > 90^\circ$ و به شرط $\gamma = 360^\circ - 2\hat{C}$ ، به این ترتیب [(۳.۲۰) را ببینید]:

$$\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \geq -\frac{3}{2}$$



شکل ۱۸.۳



شکل ۱۷.۳

(۲) ABC را مثلث مفروض می‌گیریم. قرار می‌دهیم:

$$e_1 = \frac{\vec{AB}}{|AB|}, e_2 = \frac{\vec{BC}}{|BC|}, e_3 = \frac{\vec{CA}}{|CA|}$$

بنابراین (شکل ۱۸.۳):

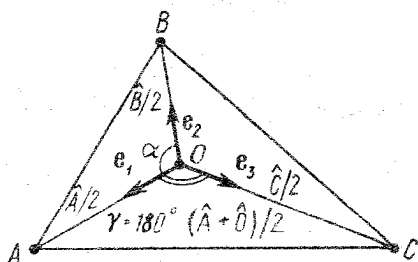
$$\alpha = 180^\circ - \hat{B}, \beta = 180^\circ - \hat{C}, \gamma = 180^\circ - \hat{A}$$

که اگر در برابری (۳.۲۰) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$-\cos \hat{C} - \cos \hat{B} - \cos \hat{A} \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} \leq \frac{3}{2}$$

(۳) O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$e_1 = \frac{\vec{OA}}{|OA|}, e_2 = \frac{\vec{OB}}{|OB|}, e_3 = \frac{\vec{OC}}{|OC|}$$



شکل ۱۹.۳

به این ترتیب داریم (شکل ۱۹.۳):

$$\alpha = 180^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}, \beta = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}, \gamma = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2},$$

$$\cos \alpha = -\sin \frac{\hat{C}}{2}, \cos \beta = -\sin \frac{\hat{A}}{2}, \cos \gamma = -\sin \frac{\hat{B}}{2}$$

و بنابراین، با توجه به (۳.۲۰) خواهیم داشت:

$$\sin \frac{\hat{A}}{2} + \sin \frac{\hat{B}}{2} + \sin \frac{\hat{C}}{2} \leq \frac{3}{2}$$

مثال ۲۹.۲.۳ * نقطهٔ O را در درون چهار وجهی $ABCD$ در نظر

می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\alpha_1 = \widehat{AOB}, \alpha_2 = \widehat{AOC}, \alpha_3 = \widehat{AOD}, \alpha_4 = \widehat{BOC},$$

$$\alpha_5 = \widehat{BOD}, \alpha_6 = \widehat{COD}$$

ثابت کنید، بین زاویه‌های α_i ($i = 1, 2, \dots, 6$)، دست کم یک زاویه وجود دارد، به نحوی که

الف) بزرگتر از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ نباشد؛

ب) کوچکتر از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ نباشد.

حل. الف) e_1, e_2, e_3, e_4 را بردارهایی یک‌ه و، به ترتیب، در جهت $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ می‌گیریم: پس $(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) \geq 0$ و یا

$$4 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \dots + \cos\alpha_6) \geq 0$$

اگر همه زاویه‌های α_i از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ بزرگتر باشند، آن وقت، به ازای

$i = 1, 2, \dots, 6$ خواهیم داشت $\cos\alpha_i < -\frac{1}{3}$ که منجر به تناقض می‌شود:

$$0 \leq 4 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \dots + \cos\alpha_6) <$$

$$< 4 + 2 \times 6 \times -\frac{1}{3} = 0$$

بنابراین، در بین زاویه‌های α_i ، زاویه‌ای وجود دارد که از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ بزرگتر نیست.

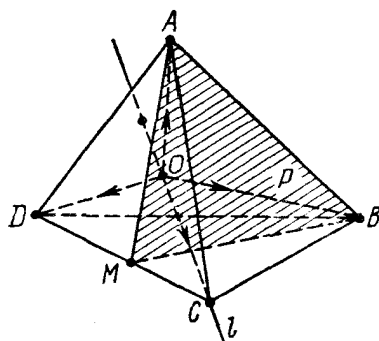
ب) بردارهای e_1, e_2, e_3, e_4 ، بستگی خطی دارند، بنابراین عددهای x, y, z, t وجود دارند، به نحوی که $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 0$ و

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 = 0 \quad (3.21)$$

ثابت می‌کنیم، همه عددهای x, y, z, t هم علامت‌اند. نقطه O در درون چهار وجهی قرار دارد، بنابراین، صفحه P که از نقطه‌های A, B

می‌گذرد، یسال $[CD]$ را در نقطهٔ درونی M قطع می‌کند (شکل ۲۰.۳) و اگر بردارهای e_1, e_2, e_3 و e_4 از نقطهٔ O رسم شده باشند، دوانتهای هر یک از دو بردار e_3 و e_4 ، در دو طرف صفحهٔ P قرار می‌گیرند. خط راست (OC) را l می‌نامیم و بردار $a = \text{Pr}_l^P e_4$ را، که مخالف صفر است، در جهت مخالف با e_3 ، از نقطهٔ O رسم می‌کنیم. از طرف دیگر، از برابری (۳.۲۱)، با در نظر گرفتن برابری‌های $\text{Pr}_l^P e_4 = \text{Pr}_l^P e_3 = 0$ ، بعد از تصویر کردن l به موازات P ، به دست می‌آید:

$$ze_3 + ta = 0 \quad (3.22)$$



شکل ۲۰.۳

عددهای z و t صفر نیستند: اگر $z=0$ ($t=0$)، از رابطهٔ (۳.۲۲) به دست می‌آید $t=0$ ($z=0$) و در نتیجه [با توجه به (۳.۲۱)]:

$$xe_1 + ye_2 = 0, \quad x^2 + y^2 > 0$$

یعنی بردارهای e_1 و e_2 هم راستا می‌شوند، که ممکن نیست. بردارهای e_3 و a در خلاف جهت یکدیگرند، بنابراین z و t هم علامت‌اند [۳.۲۲] را ببینید]. به همین ترتیب ثابت می‌شود که x و t (y و t) هم علامت‌اند. بنابراین، هر شش عدد xt, xz, xy, yt, yz, zt مثبت‌اند.

اکنون، اگر همهٔ زاویه‌های α_i را کوچکتر از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ ، یعنی

$\cos \alpha_i > -\frac{1}{3}$ فرض کنیم، به دست می آید:

$$2xy(e_1, e_2) = 2xy \cos \alpha_1 > -\frac{2}{3}xy$$

و به همین ترتیب

$$2xz(e_1, e) = 2xz \cos \alpha_2 > -\frac{2}{3}xz,$$

$$2xt(e_1, e_4) > -\frac{2}{3}xt, \quad 2yz(e_2, e_3) > -\frac{2}{3}yz,$$

$$2yt(e_2, e_4) > -\frac{2}{3}yt, \quad 2zt(e_3, e_4) > -\frac{2}{3}zt$$

و بنا بر دستور (۳.۲۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 &= (xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \\ &+ 2[xy(e_1, e_2) + xz(e_1, e_3) + xt(e_1, e_4) + yz(e_2, e_3) + \\ &+ yt(e_2, e_4) + zt(e_3, e_4)] > x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - \\ &- \frac{2}{3}(xy + xz + xt + yz + yt + zt) = \frac{1}{3}[(x-y)^2 + \\ &+ (x-z)^2 + (x-t)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2] \geq 0. \end{aligned}$$

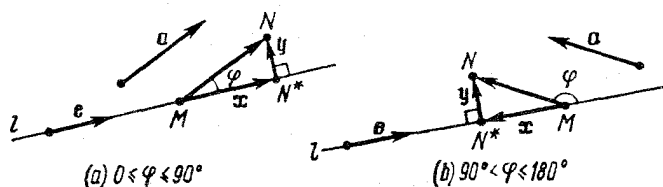
که يك تناقض است.

بخش ۳.۳. تصویر عمودی در فضا.

معادله متعارف برداری صفحه

l را خط راستی در فضا می گیریم. تصویر قائم نقطه M بر خط راست l ، یعنی $\text{Pr}_l M$ را، به عنوان نقطه ای مثل $M^* = \text{Pr}_l^P(M)$ تعریف می کنیم که، در آن، P صفحه عمود بر l است. اگر $M \in l$ ، آن وقت $M^* = M$ و اگر

$M \notin l$ ، آن وقت، M^* پای عمودی است که از نقطه M بر خط راست l فرود آمده باشد.



شکل ۳.۱۰

a را يك بردار می گیریم. بنا به تعریف، تصویر قائم بردار a بر خط راست l ، عبارت است از $\text{Pr}_l a = \text{Pr}_l^P(a)$. اکنون سعی می کنیم، عبارتی برای بیان $\text{Pr}_l a$ پیدا کنیم. نقطه ای مانند M را بر خط راست l انتخاب می کنیم و $\vec{MN}$ را برابر a می گیریم (شکل ۳.۱۰، a و b). اگر آن وقت $N^* = \text{Pr}_l N$

$$\text{Pr}_l a = \vec{MN}^*$$

اگر فرض کنیم $\vec{x} = \vec{MN}^*$ و $\vec{y} = \vec{N}^*N$ داریم:

$$a = x + y \quad (3.23)$$

اگر e ، بردار هادی خط راست l باشد، داریم: $x = \lambda e$. برای پیدا کردن λ ، دو طرف (۳.۲۳) را در e ، به صورت اسکالر، ضرب می کنیم و به یسار می آوریم که، بنا به تعریف تصویر قائم نقطه N ، $(y, e) = 0$. به دست می آید:

$$(a, e) = \lambda(e, e)$$

یعنی

$$\text{Pr}_l a = x = \lambda e = \frac{(a, e)}{(e, e)} e \quad (3.24)$$

$$|\text{Pr}_l \mathbf{a}| = \left| \frac{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}| \cos \varphi}{|\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{e}|} \mathbf{e} \right| = |\mathbf{a}| \cdot |\cos \varphi| = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{|\mathbf{e}|} \quad (3.25)$$

P را صفحه‌ای از فضا می‌گیریم. تصویر قائم نقطهٔ M بر صفحهٔ P ، به عنوان نقطهٔ $M^* = \text{Pr}_P^l(M)$ تعریف می‌شود که، در آن، خط راست l ، بر صفحهٔ P عمود است. بنابراین، اگر $M \in P$ ، آن وقت $M^* = M$ ؛ و اگر $m \notin P$ ، آن وقت، M^* ، پای عمود وارد از نقطهٔ M بر صفحهٔ P است. اگر $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ ، بردار عمود بر صفحهٔ P باشد (یعنی بردار هادی خط راست l)، با توجه به برابری معلوم

$$\mathbf{a} = \text{Pr}_P^l(\mathbf{a}) + \text{Pr}_l^P(\mathbf{a})$$

و دستور (۳.۲۴)، می‌توان نوشت:

$$\text{Pr}_P \mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \mathbf{n} \quad (3.26)$$

که در آن، $\text{Pr}_P \mathbf{a}$ ، به معنای تصویر قائم بردار $\mathbf{a}$ بر صفحهٔ P است، یعنی

$$\text{Pr}_P \mathbf{a} = \overrightarrow{\text{Pr}_P M \text{Pr}_P N}, \quad \overrightarrow{MN} = \mathbf{a}$$

مثال ۱۰۳.۳. طول ضلع مثلث ABC ، قاعدهٔ منشور منتظم، $ABCA_1B_1C_1$ برابر a است. نقطه‌های M ، N ، P و Q را، وسط یال‌های $[AB]$ ، $[AC]$ ، $[A_1C_1]$ و $[C_1B_1]$ گرفته‌ایم و می‌دانیم، طول تصویر بردار $\overrightarrow{MP}$ روی خط راست (NQ) ، برابر $\frac{a}{4}$ شده است. طول ارتفاع منشور را پیدا کنید.

حل. بنا به فرض داریم $[(3.25)]$ را ببینید:

$$|\text{Pr}_{(NQ)} \overrightarrow{MP}|^2 = \frac{(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ})^2}{|\overrightarrow{NQ}|^2} = \frac{a^2}{16}$$

بنابراین $\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$ ، $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ و $\mathbf{c} = \overrightarrow{BB_1}$ را، بردارهای پایه می‌گیریم. بنابراین

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = a, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a^2}{4}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$$

(منشور، منتظم است). باید $h = |c|$ را پیدا کنیم. چون

$$\vec{MP} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \vec{NQ} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c}$$

خواهیم داشت:

$$(\vec{MP}, \vec{NQ}) = -\frac{1}{4}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{c}^2 = h^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$|\vec{NQ}|^2 = \frac{1}{4}a^2 + \mathbf{c}^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

و برای مقدار $x = h^2$ ، به معادله زیر می‌رسیم:

$$(\vec{MP}, \vec{NQ})^2 = \left(x - \frac{a^2}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{16}\left(x + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{16}|\vec{NQ}|^2$$

و یا $x^2 - \frac{5}{16}a^2x = 0$ و چون $x \neq 0$ ، بنا براین

$$h^2 = \frac{5}{16}a^2 \iff h = \sqrt{\frac{5}{4}}a$$

مثال ۲۰۳.۳. (معادله برداری متعارف صفحه). قطب ثابت O ، عدد D

و بردار غیر صفر $\mathbf{N}$ را در فضا در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، مجموعه P ، همه نقطه‌هایی که، شعاع حامل آن‌ها $\mathbf{r}$ ، در معادله

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N}) = D \quad (۳.۲۷)$$

صدق کنند، يك صفحه است.

حل. $\mathbf{r}_A = \frac{D\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^2}$ را شعاع حامل نقطه A می‌گیریم (شکل ۲۲.۳). چون

$$(\mathbf{r}_A, \mathbf{N}) = \frac{D(\mathbf{N}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} = D$$

عمود بودن l بر صفحه P ، بردارهای $\vec{M}_0 M = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ و $\mathbf{N}$ برهم عمود باشند، بنابراین، تنها وقتی نقطه M بر صفحه P واقع است که داشته باشیم:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N}) = 0 \quad (3.28)$$

روشن است که اگر $D = (\mathbf{r}_0, \mathbf{N})$ فرض کنیم، معادله (۳.۲۸) به همان معادله (۳.۲۷) تبدیل می شود.

معادله $D = (\mathbf{r}, \mathbf{n})$ را، که در آن $|\mathbf{n}| = 1$ ، معادله نرمال شده (برداری) صفحه گویند.

مثال ۳.۳.۳. مطلوب است فاصله نقطه B ، با شعاع حامل $\mathbf{r}_B$ ، از صفحه P به معادله $D = (\mathbf{r}, \mathbf{N})$.

حل. خط راست l' را از نقطه B بر صفحه P عمود می کنیم و پای

آن را Q می نامیم (شکل ۲۲.۳)؛ A را نقطه ای با شعاع حامل $\mathbf{r}_A = \frac{D\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^2}$ می گیریم. بنابراین، بردارهای خط راست l' است و بنا بر (۳.۲۵) داریم:

$$d = |\text{Pr}_{l'} \vec{AB}| = \frac{|(\vec{AB}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|} = \frac{|(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|}$$

و سرانجام

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_B, \mathbf{N}) - D|}{|\mathbf{N}|} \quad (3.29)$$

مثال ۴.۳.۳. تصویر قائم نقطه $B(\mathbf{r}_B)$ را، بر صفحه $P: (\mathbf{r}, \mathbf{N}) = D$ پیدا کنید.

حل. بنا بر آن چه در مثال قبل دیدیم، نقطه های $Q = \text{Pr}_P B$ و

$$A \left(\frac{D\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^2} \right), \text{ به این ترتیب، به هم مربوط اند:}$$

$$\vec{BQ} = \text{Pr}_{l'} \vec{BA} = \frac{(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} \mathbf{N} = \frac{D - (\mathbf{r}_B, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} \mathbf{N}$$

و از آن جا

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_B + \overrightarrow{BQ} = \mathbf{r}_B + \frac{D - (\mathbf{r}_B, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} \mathbf{N}$$

مثال ۵.۳.۳. مطلوب است فاصله δ از نقطه M ، با شعاع حامل $\mathbf{r}_M$

از خط راست l به معادله پارامتری $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + at$

حل. $M^* = \text{Pr}_l M$ ، و M_0 را نقطه‌ای از خط راست l با شعاع حامل

$\mathbf{r}_0$ می‌گیریم (شکل ۲۳.۳). بنابراین

$$\overrightarrow{M_0 M^*} = \text{Pr}_l \overrightarrow{M_0 M} = (\overrightarrow{M_0 M}, \mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})},$$

$$\overrightarrow{M^* M} = \overrightarrow{M_0 M} - \overrightarrow{M_0 M^*} = \mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

که در آن $\mathbf{b} = \overrightarrow{M_0 M} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0$. به این ترتیب

$$\delta = |\overrightarrow{M^* M}| = \left| \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \mathbf{a} \right| =$$

$$= \sqrt{\mathbf{b}^2 - 2 \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}^2)^2} \mathbf{a}^2} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \sqrt{\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2} =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{a}|} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0)^2}$$

مثال ۶.۳.۳. معادله پارامتری خط راست l^* ، تصویر قائم خط راست

l به معادله $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + at$ را بر صفحه P به معادله $(\mathbf{r}, \mathbf{N}) = D$ پیدا کنید.

حل. M را نقطه‌ای واقع بر خط راست l با شعاع حامل

$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + at$ و Q را تصویر قائم نقطه M بر صفحه P فرض می‌کنیم. با

توجه به نتیجه‌ای که در مثال ۴.۳.۳ به دست آوردیم، داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_M + \frac{D - (\mathbf{r}_M, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} \mathbf{N} &= \left(\mathbf{r}_0 + \frac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} \mathbf{N} \right) + \\ &+ \left(\mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} \mathbf{N} \right) t \end{aligned}$$

وقتی t همه مقدارهای حقیقی را قبول کند، نقطه M سراسر خط راست l را می‌پیماید (متناظر با نقطه Q که خط راست l^* را طی می‌کند). در نتیجه

$$\mathbf{r} = \left(\mathbf{r}_0 + \frac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} \mathbf{N} \right) + \mathbf{b}t$$

که در آن $\left[t \in \mathbf{R} \text{ و } \mathbf{b} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^2} \mathbf{N} \right]$ معادله پارامتری خط راست l^* است.

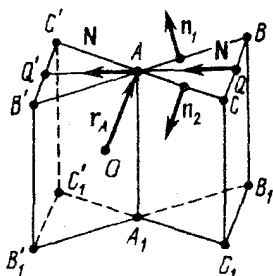
مثال ۷.۳.۳. تصویر قائم نقطه $M(\mathbf{r}_M)$ را بر خط راست l به معادله $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ پیدا کنید.

حل. از همان نمادهای مثال ۵.۳.۳ استفاده می‌کنیم (شکل ۲۳.۳). داریم:

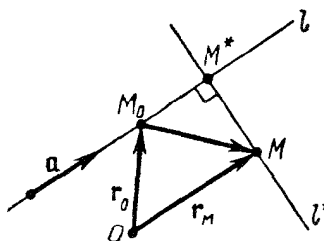
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{M^*} &= \mathbf{r}_{M_0} + \overrightarrow{M_0 M^*} = \mathbf{r}_0 + \frac{(\overrightarrow{M_0 M}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{r}_0 + \frac{(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \end{aligned}$$

مثال ۸.۳.۳. معادله خط راستی را بنویسید که از نقطه $M(\mathbf{r}_M)$ بگذرد و بر خط راست l به معادله $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ در نقطه M عمود باشد.

حل. معادله خط راست l^* عبارت است از $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M + \mathbf{b}t$ که در آن، $\mathbf{b} = \overrightarrow{M N^*}$ و $M^* = \text{Pr}_l M$ (شکل ۲۳.۳). با توجه به نتیجه مثال قبل داریم:



شکل ۲۴.۳



شکل ۲۳.۳

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_M = -\mathbf{r}_M + \mathbf{r}_0 + \frac{(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$$

مثال ۹.۳.۳. طول یال منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ (با قاعده مثلثی) برابر است با a . معادله صفحه‌های (AA_1B_1B) و (AA_1C_1C) ، به ترتیب، چنین اند: $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ و $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$ ، که در آن‌ها

$$|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = 1, \quad (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = -\frac{1}{2}$$

معادله متعارف صفحه (BB_1C_1C) را پیدا کنید.

حل. بردار قائم $\mathbf{N}$ از صفحه (BB_1C_1C) با $[AQ]$ ، نیمساز زاویه BAC هم راستاست (شکل ۲۴.۳). بنا براین، با فرض $\mathbf{N} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ داریم:

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2)} = \sqrt{1 + 2(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + 1} = 1$$

در نتیجه، معادله صفحه (BB_1C_1C) ، به این صورت است:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = D$$

که باید، در آن، D را پیدا کنیم.

فاصله $d = |AQ| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ، از نقطه A تا صفحه (BB_1C_1C) ، از

دستور (۳.۲۹) محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) - D|}{|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2|} = |(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) - D|$$

و بنا براین $D = (\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1) + (\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_2) \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ؛ و چون نقطه A در صفحه

(AA_1B_1B) قرار دارد، داریم: $(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1) = D_1$ و به همین ترتیب $(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_2) = D_2$. مسأله دارای دو جواب است:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = D_1 + D_2 + \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = D_1 + D_2 - \frac{a\sqrt{r}}{r}$$

که با دو منشور $ABCA_1B_1C_1$ و $AB'C'A_1B'_1C'_1$ متناظرند (شکل ۲۴.۳).
 مثال ۱۰.۳.۳. معادله خط راستی را پیدا کنید که با دو خط راست
 غیر موازی l و L ، به ترتیب، به معادله‌های $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}\tau$ و $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}\tau$ را
 به‌طور قائم قطع کند.

حل. این مسأله، با مسأله زیر هم‌ارز است:

نقطه‌های $M_1 \in L$ و $M_0 \in l$ را طوری مشخص کنید که بردار $\overrightarrow{M_0M_1}$ ،
 بر هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود باشد. خط راستی که از نقطه M_0 بگذرد و
 بردار هادی آن $\overrightarrow{M_0M_1}$ باشد، جواب مسأله است.

باید مقادیر t_1 و τ_1 را طوری پیدا کنیم که بردارهای $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t_1$
 و $\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}\tau_1$ ، به ترتیب، شعاع حامل‌های نقطه‌های مورد نظر M_0 و M_1 هستند.
 این عددها، از شرط عمود بودن بردارها به دست می‌آیند:

$$(\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{a}) = (\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{b}) = 0$$

از آن‌جا

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{b}\tau_1 - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}t_1, \mathbf{a}) = 0,$$

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{b}\tau_1 - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}t_1, \mathbf{b}) = 0$$

این دستگاه معادله‌ها را، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$t_0 \mathbf{a}^2 - \tau_1 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha, \quad t_0 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \tau_1 \mathbf{b}^2 = \beta \quad (3.30)$$

که در آن $\alpha = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})$ و $\beta = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{b})$. جواب دستگاه (۳.۳۰)
 چنین است:

$$t_0 = \frac{-\beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \alpha \mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}, \quad \tau_1 = \frac{\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \beta \mathbf{a}^2}{\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}$$

بنا بر این، معادله خط راست مطلوب، چنین است:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + & \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})\mathbf{b}^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2} \mathbf{a} + \\ & + \left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{b})\mathbf{a}^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2} \mathbf{b} - \right. \\ & \left. - \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})\mathbf{b}^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2} \mathbf{a} \right) t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

بخش ۴.۳. دستگاه مختصات قائم.

خط راست در صفحه. خط راست و صفحه در فضا

سه بردار واحد، که دو به دو برهم عمود باشند، يك پایه متعامد (یا قائم) را در فضا مشخص می کنند. بردارهای يکۀ پایه قائم را، طبق قرارداد، با $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ نشان می دهند. هر بردار دلخواه $\mathbf{a}$ ، نمایش منحصر به فردی به صورت

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

دارد. عددهای x, y, z را، مختصات بردار $\mathbf{a}$ در پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ گویند و می نویسند:

$$\mathbf{a} = (x, y, z)$$

مثلاً $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ، $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ، $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ و $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$. مختصات بردارها در پایه قائم، از ویژگی خطی پیروی می کنند: برای بردارهای $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ و $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ و عددهای α و β داریم:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

از منحصر به فرد بودن تجزیه يك بردار، نسبت به يك پايه، نتیجه می شود که برابری برداری $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ هم ارز است با دستگاه معادله های عددی $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$. حاصل ضرب داخلی (اسکالر) بردارهای

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

برابر است با مجموع حاصل ضرب های مختصات هم نام:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (3.31)$$

طول بردار $\mathbf{a}$ برابر است با $|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. $\square$ از آن جا که

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0, \quad |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

بنابر دستور (۳.۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}, x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = \\ &= x_1 x_2 \mathbf{i}^2 + y_1 y_2 \mathbf{j}^2 + z_1 z_2 \mathbf{k}^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + \\ &+ (x_1 z_2 + x_2 z_1)(\mathbf{i}, \mathbf{k}) + (y_1 z_2 + y_2 z_1)(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

همچنین از رابطه (۳.۳۱) به دست می آید:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \iff |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

در تمامی این بخش، فرض را بر این گرفته ایم که، مختصات بردارها، در پایه قائم داده شده اند.

مثال ۳.۴۰.۱. مطلوب است مختصات و طول بردار $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ ، به

شرطی که

$$\mathbf{a} = (0, -2, -3), \mathbf{b} = (3, 2, 3)$$

حل. بنابر ویژگی خطی مختصات

$$3a + 2b = (3 \times 0 + 2 \times 3, 3(-2) + 2 \times 2,$$

$$3(-3) + 2 \times 3) = (6, -2, -3)$$

و از آنجا

$$|3a + 2b| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = 7$$

مثال ۳.۴.۳. مقدار m را طوری پیدا کنید که، بردارهای

$$a = (m, -2, 1) \text{ و } b = (m, m, -3) \text{ برهم عمود باشند.}$$

حل. داریم:

$$a \perp b \iff 0 = (a, b) = m^2 - 2m - 3 \iff m = -1 \text{ یا } 3$$

مثال ۳.۴.۳. مختصات بردار واحد e را، که جهتی مخالف با جهت

بردار $a = (2, -2, 1)$ دارد، پیدا کنید.

$$\text{حل. داریم: } |a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \text{ و}$$

$$e = -\frac{a}{|a|} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

مثال ۳.۴.۳. زاویه بین بردارهای $a = (1, 2, 2)$ و $b = (-1, 0, -1)$

را پیدا کنید.

حل. به ترتیب، داریم:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{a, b}) &= \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{1(-1) + 2 \times 0 + 2(-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \\ &= -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \widehat{a, b} = 135^\circ \end{aligned}$$

اگر $\{i, j, k\}$ پایه‌ای قائم باشد، دستگاه مختصات $\{O, i, j, k\}$ را،

دستگاه قائم (یا راست گوشه) گویند. اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$

دو نقطه مفروض باشند، آن گاه

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$|\vec{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال ۰۵۰۴۰۳. $A(3, 2, -3)$, $B(4, 3, -3)$ و $C(3, 1, -4)$

رأس‌های يك مثلث اند. مقدار زاویه $\hat{A}$ و طول میانه $[AN]$ را پیدا کنید.

حل. زاویه $\hat{A}$ بین بردارهای

$$\vec{AB} = (4 - 3, 3 - 2, -3 - (-3)) =$$

$$= (1, 1, 0), \quad \vec{AC} = (0, -1, -1)$$

قرار دارد و بنا براین

$$\cos \hat{A} = \frac{(\vec{AB}, \vec{AC})}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \quad \hat{A} = 120^\circ$$

و برای بردار AN داریم:

$$\vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right);$$

$$|AN| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

دو بردار واحد عمود برهم را، که با صفحه P موازی و به ترتیب معینی قرار گرفته باشند، پایه متعامد یکه (یا پایه قائم) در صفحه P گویند. بردارهای یکه پایه قائم را در صفحه، به طور قراردادی، با $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ نشان می‌دهند. هر بردار $\mathbf{a}$ ، موازی با صفحه P ، به صورتی منحصر به فرد به شکل $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ نشان داده می‌شود. عددهای x و y را، مختصات بردار $\mathbf{a}$ در پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ گویند و می‌نویسند:

$$\mathbf{a} = (x, y)$$

اگر $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ و $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$ ، آن وقت، برای هر دو عدد دلخواه α و β داریم:

$$a + \beta b = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$(a, b) = x_1 x_2 + y_1 y_2, |a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

برابری برداری $a = b$ هم‌ارز است با دستگاه برابری‌های $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. اگر O متعلق به P و $\{i, j\}$ پایهٔ قاعده در صفحهٔ P باشد، آن وقت، دستگاه مختصات $\{O, i, j\}$ در صفحهٔ P را، دستگاه مختصات قائم گویند. اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، نقطه‌هایی از صفحهٔ P باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1); |\vec{AB}| = \\ &= |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

مثال ۴.۴.۳. نقطهٔ $A(-1, 2)$ و بردار $a = (3, -4)$ مفروض‌اند. مختصات نقطه‌های B و C را پیدا کنید، به نحوی که داشته باشیم:

$$\vec{AB} = a, \vec{AC} \perp a, |\vec{AC}| = |a|$$

حل. اگر (x, y) مختصات B باشند، داریم: $\vec{AB} = (x + 1, y - 2)$ و اگر $a = \vec{AB}$ ، آن‌گاه $x + 1 = 3$ و $y - 2 = -4$ ، یعنی $x = 2$ و $y = -2$. مختصات نقطهٔ B عبارت است از $(2, -2)$.

اکنون مختصات نقطهٔ C را (x', y') می‌گیریم، یعنی

$$\vec{AC} = (x' + 1, y' - 2)$$

چون $(\vec{AC}, a) = 3(x' + 1) - 4(y' - 2) = 0$ ، بنابراین

$$x' = \frac{4}{3}y' - \frac{11}{3}$$

به‌جز این $|\vec{AC}| = |a|$ ، یعنی $3^2 + (-4)^2 = (x' + 1)^2 + (y' - 2)^2$ و یا

$$\left(\frac{4}{3}y' - \frac{11}{3}\right)^2 + (y' - 2)^2 = 25 \Rightarrow y'_1 = -1, y'_2 = 5$$

برای نقطهٔ C ، دو جواب به دست می‌آید: $C_1(-5, -1)$ و $C_2(3, 5)$.
مثال ۴.۴.۳: (معادلهٔ متعارف خط راست در صفحه). ثابت کنید، در

هر دستگاه مختصات، معادله

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0 \quad (3.32)$$

معرف خط راستی در آن صفحه است. مفهوم هندسی ضریب‌های A و B را پیدا کنید (دستگاه مختصات را قائم می‌گیریم).

حل. اگر $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$ ، دو نقطه مفروض متمایز باشند (لازم نیست، دستگاه مختصات، قائم باشد)، آن وقت، معادله خط راست $l = (M_1, M_2)$ در این دستگاه مختصات، چنین است $[(2.53)]$ را ببینید:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{یا} \quad Ax + By + C = 0$$

که در آن

$$A^2 + B^2 > 0, \quad C = -Ax_1 - By_1, \quad B = -(x_2 - x_1), \quad A = y_2 - y_1$$

بردار

$$a = (-B, A) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad (3.33)$$

بردار هادی خط راست l است که با معادله (3.32) مشخص می‌شود.

هر معادله به صورت (3.32) ، معادله خط راستی از صفحه است. این

خط راست، از نقطه‌های $(0, -\frac{C}{B})$ و $(-\frac{C}{A}, 0)$ می‌گذرد (بسه شرط

$A \neq 0$ و $B \neq 0$). اگر $A = 0$ ، معادله $By + C = 0$ ، معرف خط

راستی است که از نقطه‌های $(0, -\frac{C}{B})$ و $(1, -\frac{C}{B})$ می‌گذرد و موازی

بامحور طول است. معادله $Ax + C = 0$ ، $(A \neq 0)$ ، معرف خط راستی موازی

محور عرض است $\left[\text{این خط راست از نقطه‌های } (-\frac{C}{A}, 0) \text{ و } (-\frac{C}{A}, 1) \right]$

عبور می‌کند.

اگر نقطه M به مختصات (x_1, y_1) متعلق به خط راست l به معادله

(۳.۳۲) باشد، خواهیم داشت $Ax_1 + By_1 + C = 0$ ؛ و معادله (۳.۳۲) به این صورت درمی آید:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad (3.34)$$

اگر با دستگاه مختصات قائم سروکار داشته باشیم، آن وقت، برای بردار $N = (A, B)$ خواهیم داشت:

$$(N, a) = A(-B) + BA = 0$$

یعنی، بردار N ، بر بردار a عمود است (شکل ۲۵.۳). بردار N را، بردار قائم (یا بردار نرمال) خط راست l ، به معادله (۳.۳۲) گویند. به این ترتیب، برای خط راست l ، به معادله (۳.۳۲)، در دستگاه مختصات قائم، مختصات بردار نرمال N ، همان ضرایب‌های متغیرهای x و y در معادله (۳.۳۲) است. معادله (۳.۳۲) را، به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$(r, N) = D \quad (3.35)$$

که در آن، $r = (x, y)$ شعاع حامل نقطه دلخواه $M(x, y)$ از خط راست l ، $N = (A, B)$ بردار نرمال آن و $D = -C$ است. اگر با دستگاه مجاورهای مختصات قائم سروکار داشته باشیم، (۳.۳۵) را، که هم‌ارز با (۳.۳۲) است، معادله متعارف (یا معادله نرمال) خط راست l گویند.

مثال ۸.۴.۳. شعاع حامل x را، برای نقطه مشترک خط‌های راست

زیر پیدا کنید:

$$l: (r, N) = D, L: r = r_0 + bt, t \in \mathbb{R}, (N, b) \neq 0$$

حل. برای مقدار مشخصی از $t \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(x, N) = D \cdot x = r_0 + bt$$

اگر مقدار x را در معادله اول قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$(r_0, N) + t(b, N) = D \Leftrightarrow t = \frac{D - (r_0, N)}{(b, N)}$$

و از آنجا

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_0 + \frac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{N})}{(\mathbf{b}, \mathbf{N})} \mathbf{b}$$

وقتی از زاویه بین دو خط راست متقاطع صحبت می‌کنیم، منظورمان زاویه کوچکتر بین آنهاست (زاویه حاده). زاویه بین دو خط راست عمود برهم، برابر ۹۰ درجه است. اگر دو خط راست با هم موازی باشند، زاویه بین آنها را، صفر درجه به حساب می‌آورند. زاویه بین دو خط راست متنافر، عبارت است از زاویه بین دو خط راست متقاطعی که موازی با آنها رسم شده باشند. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای هادی دو خط راست باشند، زاویه φ بین این دو خط راست، با دستور زیر به دست می‌آید:

$$\cos \varphi = \left| \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \right|$$

مثال ۹.۴.۳. زاویه φ بین دو خط راست زیر را پیدا کنید:

$$-x + 2y + 3 = 0, \quad 3x - y - 1 = 0$$

حل. بردارهای هادی این دو خط راست، چنین‌اند:

$$\mathbf{a} = (-2, -1), \quad \mathbf{b} = (1, 3)$$

[(۳.۳۳) را ببینید]. از آنجا

$$\cos \varphi = \left| \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \right| = \left| \frac{(-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = 45^\circ$$

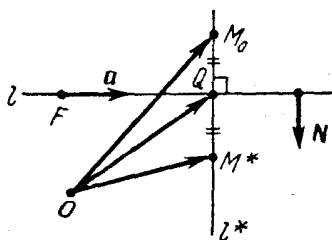
مثال ۱۰.۴.۳. نقطه $M^*(x^*, y^*)$ ، قرینه نقطه $M_0(1, 3)$ نسبت

به خط راست l به معادله $x - 2y + 3 = 0$ را پیدا کنید.

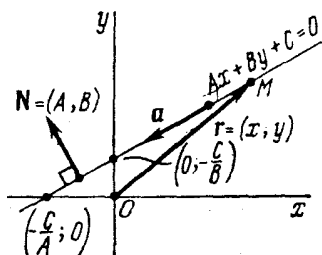
حل. بنا به تعریف نقطه قرینه

(a) بردار $\overrightarrow{M_0 M^*} = (x^* - 1, y^* - 3)$ بر خط راست l و، بنابراین،

بر بردار هادی آن $\mathbf{a} = (2, 1)$ عمود است، یعنی



شکل ۲۶.۳



شکل ۲۵.۳

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{M_0 M^*}, \mathbf{a}) = 2(x^* - 1) + (y^* - 3) = \\ &= 2x^* + y^* - 5 \end{aligned} \quad (3.36)$$

(b) نقطهٔ وسط پاره خط راست $[M_0 M^*]$ (شکل ۲۶.۳)، یعنی نقطهٔ $Q\left(\frac{1+x^*}{2}, \frac{3+y^*}{2}\right)$ برخط راست l واقع است و، بنابراین، مختصات نقطهٔ Q ، درمعادلهٔ خط راست l صدق می‌کند، یعنی

$$0 = \frac{1+x^*}{2} - 2\frac{3+y^*}{2} + 3 = \frac{1}{2}x^* - y^* + \frac{1}{2} \quad (3.37)$$

و از معادله‌های (۳.۳۶) و (۳.۳۷) به‌دست می‌آید:

$$x^* = \frac{9}{5}, \quad y^* = \frac{7}{5}$$

مثال ۱۱.۴.۳. معادلهٔ خط راست l^* را پیدا کنید که از نقطهٔ $M_0(3, 7)$ بگذرد و برخط راست l به معادلهٔ $x - y + 3 = 0$ عمود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M_0 از خط راست l را به‌دست آورید.

حل. بردار نرمال $\mathbf{N} = (1, -1)$ از خط راست l ، در ضمن، بردارهای خط راست l^* هم‌هست. چون l^* از نقطهٔ M_0 عبور می‌کند، معادلهٔ

آن چنین است:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-1} \Leftrightarrow x+y-10=0$$

نقطه برخورد خط‌های راست l و l^* (یعنی، پای عمود وارد از نقطه M_0 برخط راست l) را Q و مختصات آن را (x_0, y_0) می‌نامیم. این مختصات، از دستگاه $x_0 - y_0 + 3 = 0$ و $x_0 + y_0 - 10 = 0$ به دست می‌آید:

$$x_0 = \frac{7}{2}, \quad y_0 = \frac{13}{2}$$

و فاصله نقطه M_0 از خط راست l چنین می‌شود:

$$d = |M_0 Q| = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{13}{2} - 7\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

عمل تصویر قائم برخط راست را، در صفحه، شبیه آن چه در مورد حالت فضایی گفته‌ایم، تعریف می‌کنیم: اگر M_0 نقطه‌ای واقع بر صفحه P باشد، آن گاه، تصویر قائم $Pr_l M_0$ روی خط راست $l \subset P$ ، عبارت است از نقطه Q ، پای عمود l^* ، که از نقطه M_0 بر خط راست l رسم شده است. اگر $M_0 \in l$ ، آن وقت $Q = M_0$ (شکل ۲۶.۳). اگر خط راست $l \in P$ را عمود بر l در نظر بگیریم، چون $l \parallel l^*$ ، بنا براین

$$Pr_l M_0 = Pr_l^l \circ (M_0) = Pr_l^l(M_0)$$

بنابراین تعریف، برای هر بردار $\mathbf{b}$ از صفحه P ؛ $Pr_l \mathbf{b} = Pr_l^l \circ (\mathbf{b})$ ، شبیه حالت فضایی، برای تصویر قائم در صفحه هم، این برابری‌ها، برقرارند:

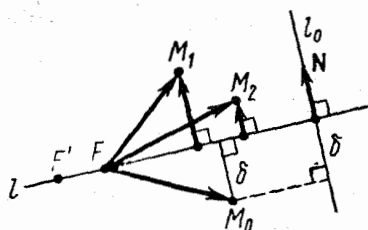
$$Pr_l \mathbf{b} + Pr_{l_0} \mathbf{b} = \mathbf{b}, \quad (l \perp l_0) \quad (3.38)$$

$$Pr_l \mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \mathbf{a} \quad (3.39)$$

$$|Pr_l \mathbf{b}| = \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|\mathbf{a}|} \quad (3.40)$$

(a)، بردار هادی خط راست l است).

خط راست $l \in P$ ، صفحه P را به دو نیم صفحه تقسیم می کند. اگر خط راست $l_0 \perp l$ و بردار نرمال N از خط راست l را، در صفحه P ، ثابت بگیریم، آن وقت، نقطه های $M_1 \notin l$ و $M_2 \notin l$ ، وقتی و تنها وقتی بر یک نیم صفحه قرار دارند که، بردارهای $\vec{FM}_1$ و $\vec{FM}_2$ در یک جهت باشند (شکل ۲۷.۳)، یعنی عددهای $d_1 = \frac{(\vec{FM}_1, N)}{|N|}$ و $d_2 = \frac{(\vec{FM}_2, N)}{|N|}$ هم علامت باشند [۳.۳۹] را ببینید. در این رابطه، برای هر نقطه $M \in P$ ،



شکل ۲۷.۳

عدد

$$d = d_l(M) = \frac{(\vec{FM}, N)}{|N|} \quad (3.41)$$

را فاصله جهت دار نقطه M از خط راست l می نامیم. عددهای $d_l(M_1)$ و $d_l(M_2)$ ، تنها وقتی دارای یک علامت اند که، نقطه های M_1 و M_2 نسبت به خط راست l ، در یک نیم صفحه باشند. اگر ابتدای بردار N روی خط راست l باشد، آن وقت، تنها وقتی $d_l(M) > 0$ ، که نقطه M و انتهای بردار N در یک نیم صفحه واقع باشند.

مثال ۳.۴.۳.۱ (فاصله یک نقطه تا خط راست، در صفحه). ثابت کنید،

عدد $d_l(M)$ در دستور (۳.۴۱)، مستقل از انتخاب $F \in l$ و طول بردار N است. $|d_l(M_0)|$ را، فاصله معمولی نقطه M_0 تا خط راست l در نظر می گیریم.

ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$l: Ax + By + C = 0, \quad \mathbf{N} = (A, B)$$

آن وقت، برای نقطه $M_0(x_0, y_0)$ داریم:

$$d_l(M_0) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.42)$$

حل. F' را نقطه دیگری واقع بر خط راست l می گیریم، در این صورت $\vec{F'F} \perp \mathbf{N}$ ، یعنی $(\vec{F'F}, \mathbf{N}) = 0$. بنا بر این

$$\frac{(\vec{F'M}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|} = \frac{(\vec{F'F}, \mathbf{N}) + (\vec{FM}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|} = \frac{(\vec{FM}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}$$

اگر $\mathbf{N}' = k\mathbf{N}$ و $k > 0$ ، آن گاه $|\mathbf{N}'| = k|\mathbf{N}|$ و

$$\frac{(\vec{FM}, \mathbf{N}')}{|\mathbf{N}'|} = \frac{(\vec{FM}, k\mathbf{N})}{k|\mathbf{N}|} = \frac{(\vec{FM}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}$$

فاصله نقطه M_0 از خط راست l ، برابر است با (شکل ۲۷.۳):

$$\delta = |\text{Pr}_{l_0} \vec{FM}_0| = \frac{|(\vec{FM}_0, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|} = |d_l(M_0)|$$

[(۳.۴۰) را ببینید]. شواجم، اگر

$$l: Ax + By + C = 0, \quad \mathbf{N} = (A, B), \quad M_0(x_0, y_0)$$

آن وقت، اگر مختصات نقطه F را (x_F, y_F) بنامیم، با توجه به این که F متعلق به l است، یعنی $C = -(Ax_F + By_F)$ ، خواهیم داشت:

$$d_l(M_0) = \frac{(\vec{FM}_0, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|} = \frac{(x_0 - x_F)A + (y_0 - y_F)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

مثال ۱۳.۴.۳. مطلوب است طول h ، ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC در مثلث ABC ، به شرطی که داشته باشیم:

$$A(4, 4), B(-6, -1), C(-2, -4)$$

حل. معادله خط راست $l = (BC)$ ، چنین است:

$$\frac{x+6}{-2+6} = \frac{x+1}{-4+1} \Leftrightarrow 3x + 4y + 22 = 0$$

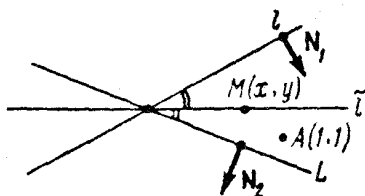
و بنا بر این

$$h = |d_l(A)| = \left| \frac{3 \times 4 + 4 \times 4 + 22}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 10$$

مثال ۱۴.۴.۳. نقطه $A(1, 1)$ در درون زاویه بین دو خط راست

$$l: x + 7y = 0, \quad L: x - y - 4 = 0$$

قرار دارد. مطلوب است معادله خط راست $\tilde{l}$ ، نیمساز بین این دو خط راست.



شکل ۲۸.۳

حل. اگر نقطه $M(x, y) \in \tilde{l}$ در درون زاویه مفروض باشد (شکل ۲۸.۳)، آن وقت باید عددی

$$d_l(M) = \frac{x+7y}{\sqrt{50}} \quad \text{و} \quad d_L(A) = \frac{1+7 \times 1}{\sqrt{50}} > 0$$

هم علامت باشند، یعنی باید داشته باشیم: $d_l(M) > 0$. همچنین، عددی

$$d_L(M) = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}}, d_L(A) = \frac{1-1-4}{\sqrt{2}} < 0$$

نیز هم علامت اند، یعنی $d_L(M) < 0$. بنا به تعریف نیمساز، نقطه $M(x, y)$ از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و چون $|d_L(M)| = d_L(M)$ و $|d_L(M)| = -d_L(M)$ ، بنا براین

$$\frac{x+7y}{5\sqrt{2}} = -\frac{x-y-4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 6x+2y-20=0$$

معادله نیمساز موردنظر، به صورت $3x+y-10=0$ درمی آید.

مثال ۱۵۰۴۰۳. $A(4,4)$ ، $B(-6,-1)$ و $C(-2,-4)$ رأس های مثلث ABC را تشکیل می دهند. معادله نیمساز داخلی رأس C را پیدا کنید. حل. داریم:

$$\vec{CA} = (6, 8), \vec{CB} = (-4, 3), |\vec{CA}| = 10, |\vec{CB}| = 5$$

با توجه به دستوری که در مثال ۱۱۰۲۰۳ به دست آوردیم، بردار هادی نیمساز زاویه C ، چنین است:

$$\frac{|\vec{CA}|\vec{CB} + |\vec{CB}|\vec{CA}}{|\vec{CA}| + |\vec{CB}|} = \frac{10\vec{CB} + 5\vec{CA}}{15} = \frac{2\vec{CB} + \vec{CA}}{3} =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

در نتیجه، معادله نیمساز موردنظر، چنین است:

$$\frac{x+2}{-\frac{2}{3}} = \frac{y+4}{\frac{14}{3}} \Leftrightarrow 7x+y+18=0$$

مثال ۱۶۰۴۰۳. رأس $A(3, -4)$ و معادله دو ارتفاع

$$(BM): 7x-2y-1=0, (CN): 2x-7y-6=0$$

از مثلث ABC مفروض‌اند. معادله ضلع BC را پیدا کنید.

حل. بردار نرمال $(2 - 7)$ از خط راست (BM) ، با خط راست

(AC) موازی است. بنابراین، معادله خط راست (AC) ، چنین است:

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y+4}{-2} \iff (AC): 2x + 7y + 22 = 0$$

مختصات نقطه $C(x_c, y_c) = (AC) \cap (CN)$ ، از دستگاه معادله‌های

$$2x_c + 7y_c + 22 = 0, \quad 2x_c - 7y_c - 6 = 0$$

به دست می‌آید، یعنی $x_c = -4$ و $y_c = -2$.

به همین ترتیب، $(7 - 2)$ بردار هادی (AB) است و معادله خط

راست (AB) ، چنین است:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-7} \iff (AB): 7x + 2y - 13 = 0$$

و مختصات نقطه B ، از دستگاه معادله‌های

$$7x_B + 2y_B - 13 = 0, \quad 7x_B - 2y_B - 1 = 0$$

به دست می‌آید، یعنی $x_B = 1$ و $y_B = 3$. به این ترتیب، معادله خط راست

(BC) عبارت است از:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-3}{-2-3} \iff x - y + 2 = 0$$

مثال ۰۱۷۰۴۰۳. از نقطه $M_0(-3, 13, 7)$ ، عمودی بر خط راست

$$l: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{1}$$

فرود آورده‌ایم. معادله این عمود و طول آن را پیدا کنید.

حل. پای عمود وارد از M_0 بر l را $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ می‌گیریم.

(شکل ۲۶۰۳ را ببینید). چون $Q \in l$ ، پس

$$\frac{x_0 - 1}{3} = \frac{z_0 - 3}{1} \iff x_0 = 3z_0 - 8,$$

$$\frac{y_0 - 2}{-4} = \frac{z_0 - 3}{1} \iff y_0 = -4z_0 + 14$$

بردار $\vec{M_0Q} = (x_0 + 3, y_0 - 13, z_0 - 7)$ بر بردارهای خط راست l ، یعنی بر $\mathbf{a} = (3, -4, 1)$ عمود است، بنا براین

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{a}, \vec{M_0Q}) = 3(x_0 + 3) - 4(y_0 - 13) + (z_0 - 7) = \\ &= 3(3z_0 - 8) - 4(-4z_0 + 14) + (z_0 - 7) = 26z_0 - 26 \end{aligned}$$

و از آنجا: $z_0 = 1, x_0 = -8, y_0 = 10$

$$\delta = |M_0Q| = \sqrt{(-8 + 3)^2 + (10 - 13)^2 + (1 - 7)^2} = 7$$

و معادله خط راست (M_0Q) ، چنین است:

$$\frac{x + 3}{-8 + 3} = \frac{y - 13}{10 - 13} = \frac{z - 7}{1 - 7} \iff$$

$$\iff \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 13}{3} = \frac{z - 7}{6}$$

مثال ۱۸۰۴۰۳. نقطه $M^*(x^*, y^*, z^*)$ ، قرینه نقطه $M_0(1, 2, 3)$ را،

نسبت به خط راست $l: \frac{x - 8}{1} = \frac{y - 11}{3} = \frac{z - 4}{-1}$ پیدا کنید.

حل. بردارهای

$$\vec{M_0M^*} = (x^* - 1, y^* - 2, z^* - 3) \text{ و } \mathbf{a} = (1, 3, -1)$$

برهم عمودند (با مثال ۱۸۰۴۰۳، شکل ۲۶۰۳ مقایسه کنید). بنا براین

$$(x^* - 1) + 3(y^* - 2) - (z^* - 3) = 0$$

وسط پاره خط راست $[M_0M^*]$ ، یعنی $Q\left(\frac{1+x^*}{2}, \frac{2+y^*}{2}, \frac{3+z^*}{2}\right)$ بر

خط راست l قرار دارد، یعنی

$$\frac{\frac{1+x^*}{2}-8}{1} = \frac{\frac{2+y^*}{2}-11}{3}, \quad \frac{\frac{1+x^*}{2}-8}{1} = \frac{\frac{3+z^*}{2}-4}{-1}$$

از حل دستگاه شامل سه معادله، که به دست آورده ایم، نتیجه می شود:

$$x^* = 9, \quad y^* = 2, \quad z^* = 11$$

مثال ۱۹.۴.۳. معادله های عمود مشترک این دو خط راست را پیدا کنید:

$$l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}, \quad L: \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{1}$$

حل. $a = (1, 2, -3)$ و $b = (-2, 1, 1)$ بردارهای هادی دو خط

راست هستند. $M_1(x_1, y_1, z_1) \in l$ و $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L$ را، نقطه های برخورد عمود مطلوب با خط های راست l و L می گیریم. برای پیدا کردن $x_2, y_2, z_2, x_1, y_1, z_1$ شش معادله به دست می آید.

$M_1 \in l$ ، بنا براین

$$\frac{x_1-2}{1} = \frac{y_1-2}{2}, \quad \frac{x_1-2}{1} = \frac{z_1+1}{-3};$$

$$y_1 = 2x_1 - 2, \quad z_1 = -3x_1 + 5$$

$M_2 \in L$ ، یعنی

$$\frac{x_2}{-2} = \frac{y_2-2}{1} = \frac{z_2-4}{1} \iff x_2 = -2y_2 + 4, \quad z_2 = y_2 + 2$$

$(\overrightarrow{M_1 M_2}, a) = 0$ ، بنا براین

$$x_2 - x_1 + 2(y_2 - y_1) - 3(z_2 - z_1) = 0 \iff 14x_1 + 3y_2 - 17 = 0$$

$(\overrightarrow{M_1 M_2}, b) = 0$ ، یعنی

$$-2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) = 0 \iff x_1 + 2y_2 - 3 = 0$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$x_1 = y_2 = 1, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = x_2 = 2, \quad z_2 = 3$$

به این ترتیب: $M_1(1, 0, 2)$ و $M_2(2, 1, 3)$ ، و معادله‌های عمود مشترک چنین‌اند:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{3-2} \iff \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$$

و فاصله $|M_1 M_2|$ ، بین این دو خط راست متنافر، برابر است با

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$$

مثال ۳۰۴.۳ ثابت کنید، خط راست $\tilde{l}$ ، که از نقطه $M_0(1, 2, 3)$ می‌گذرد و دو خط راست

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}, \quad L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-8}{-9} = \frac{z+3}{6}$$

را قطع می‌کند، با این دو خط راست، زاویه‌های برابر می‌سازد.
حل. فرض می‌کنیم:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) = l \cap \tilde{l}; \quad M_2(x_2, y_2, z_2) = L \cap \tilde{l}$$

در این صورت، عددهای t و τ وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$x_1 = 1 + 2t, \quad y_1 = 1 - t, \quad z_1 = 1 + 2t$$

$$x_2 = 2 + 2\tau, \quad y_2 = 8 - 9\tau, \quad z_2 = -3 + 6\tau$$

نقطه‌های M_0, M_1 و M_2 روی یک خط راست قرار دارند، بنا بر این بردارهای

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = (x_1 - 1, y_1 - 2, z_1 - 3) = (2t, -t - 1, 2t - 2)$$

$$\overrightarrow{M_0 M_2} = (x_2 - 1, y_2 - 2, z_2 - 3) = (2\tau + 1, -9\tau + 6, 6\tau - 6)$$

هم راستا هستند. بنا بر شرط هم راستایی داریم:

$$0 = \begin{vmatrix} 2t & -t-1 \\ 2t+1 & -9t+6 \end{vmatrix} = -16t^2 + 13t + 2t + 1,$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2t & 2t-2 \\ 2t+1 & 6t-6 \end{vmatrix} = 8t^2 - 14t + 4t + 2,$$

$$0 = \begin{vmatrix} -t-1 & 2t-2 \\ -9t+6 & 6t-6 \end{vmatrix} = 12t^2 - 6t - 24t + 18$$

اگر $t = \frac{3}{2}$ را از دو معادله اول حذف کنیم، به دست می آید: $t = \frac{3}{2}$

از $t = \frac{t+1}{2}$ را از دو معادله آخر حذف می کنیم، به دست می آید: $t = \frac{t+1}{2}$. آن جا

$$2t-1 = t+1 \iff t=1, t=1$$

به این ترتیب، مختصات نقطه های M_1 و M_2 مشخص می شود:

$$M_1(3, 0, 3), M_2(4, -1, 3)$$

و برای معادله خط راست $\vec{l}$ داریم:

$$\frac{x-1}{4-3} = \frac{y-2}{-1-0} = \frac{z-3}{3-3} \iff \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{0}$$

بردارهای هادی خطهای راست $\vec{l}$ و L ، به ترتیب، چنین اند:

$$\mathbf{c} = (1, -1, 0), \mathbf{a} = (2, -1, 2), \mathbf{b} = (2, -9, 6)$$

بنابراین، برای زاویه φ ، بین خطهای راست $\vec{l}$ و L داریم:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}|} = \frac{2 \times 1 + (-1)(-1) + 2 \times 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi = 45^\circ$$

و برای زاویه ψ ، بین خط‌های راست $\vec{L}$ و $\vec{A}$:

$$\cos \psi = \left| \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}|} \right| = \frac{2 \times 1 + (-9)(-1) + 6 \times 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 + (-9)^2 + 6^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \psi = 45^\circ = \varphi$$

دستگاه مختصات قائم $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ را، در فضا، ثابت می‌گیریم و P را، صفحه مفروضی با بردار نرمال به معادله

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N}) = -D \quad (3.43)$$

در نظر می‌گیریم که، در آن، $\mathbf{r} = (x, y, z)$ نقطه دلخواه $M(x, y, z) \in P$ و $\mathbf{N} = (A, B, C)$ و $A^2 + B^2 + C^2 = |\mathbf{N}|^2 > 0$ بردار نرمال صفحه P است. سمت چپ (۳.۴۳) را، با توجه به دستور (۳.۳۱) بسط می‌دهیم، به معادله متعارف صفحه P می‌رسیم:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0 \quad (3.44)$$

صفحه P ، با معادله متعارف در دستگاه مختصات قائم، بر بردار $\mathbf{N} = (A, B, C)$ عمود است که، مختصات آن، ضریب‌های x و y و z ، در معادله (۳.۴۴) است.

اگر $A \neq 0$ ، آن‌گاه صفحه P ، محور x را در نقطه M_1 با مختصات $\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$ قطع می‌کند؛ و اگر $B \neq 0$ ، آن‌گاه صفحه P محور y را

در نقطه $M_2\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$ قطع می‌کند و، سرانجام، اگر $C \neq 0$ ، صفحه

P محور z را، در نقطه $M_3\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ قطع می‌کند.

اگر $M_1(a, 0, 0)$ ، $M_2(0, b, 0)$ و $M_3(0, 0, c)$ را، نقطه‌های برخورد صفحه P با محورهای مختصات بگیریم، معادله صفحه P چنین می‌شود:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (3.45)$$

و این، معادله صفحه‌ای است که با محورهای مختصات برخورد دارد. اگر در معادله (۳.۴۴) داشته باشیم: $A=0$ ، یعنی $(i, N)=0$ ، صفحه P با محور x موازی می‌شود. این صفحه، صفحه Oyz را در امتداد خط راستی قطع می‌کند که معادله‌های آن چنین است:

$$x=0, By+Cz+D=0$$

اگر $B=0$ ، $C=0$ ، آن‌گاه صفحه P با محور y (محور z) موازی خواهد بود.

شبه آن‌چه در حالت خط راست در صفحه دیده‌ایم، در مورد صفحه هم، فاصله $d_p(M_0)$ ، از نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تا صفحه P ، داریم:

$$d_p(M_0) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (3.46)$$

برای دو نقطه $M_1 \notin P$ و $M_2 \notin P$ ، عددهای $d_p(M_1)$ و $d_p(M_2)$ تنها وقتی هم‌علامت اند که M_1 و M_2 در یک طرف صفحه P واقع باشند. $d_p(M)$ تنها وقتی مثبت است که با انتهای بردار $N=(A, B, C)$ (که ابتدای آن در صفحه P است) در یک نیم‌فضا نسبت به صفحه P قرار گیرد. وقتی که معادله صفحه P به صورت (۳.۴۴) داده شده باشد، فاصله d ، از نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تا صفحه P ، با این دستور مشخص می‌شود:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (3.47)$$

مثال ۳.۴۰.۴۰۳. دستور (۳.۴۷) را ثابت کنید.

حل. معادله (۳.۴۴) را به صورت (۳.۴۳) می‌نویسیم که، در آن، $N=(A, B, C)$ ، با استفاده از نماد $r_0=(x_0, y_0, z_0)$ و دستورهای (۳.۲۷) و (۳.۲۹) به دست می‌آید:

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}) + D|}{|\mathbf{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

مثال ۲۲.۴.۳. معادله متعارف مختصاتی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌های $M_1(1, 0, -1)$ ، $M_2(-1, 1, 0)$ و $M_3(0, 2, 1)$ می‌گذرد. حل. (۳.۴۴) را صفحه مطلوب می‌گیریم. مختصات نقطه‌های M_1 و M_2 و M_3 در این معادله صدق می‌کنند، بنابراین

$$A - C + D = 0, \quad -A + B + D = 0, \quad 2B + C + D = 0$$

از آن جا $A = 0$ ، $B = -D$ و $C = D$. معادله مطلوب، به این صورت درمی‌آید: $D(0 \times x - 1 \times y + 1 \times z + 1) = 0$ ؛ و یا

$$-y + z + 1 = 0$$

$$(D \neq 0, \text{ زیرا } 2D^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

اگر نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ، نقطه مفروضی واقع بر صفحه P باشد، آن گاه $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ و معادله (۳.۴۴) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3.48)$$

مثال ۲۳.۴.۳. معادله مختصاتی متعارف صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $M_0(-1, 2, 1)$ بگذرد و بر بردار $\mathbf{N} = (2, 0, -2)$ عمود باشد. حل. معادله صفحه مطلوب، به این صورت است [با (۳.۴۸) مقایسه کنید]:

$$2[x - (-1)] + 0(y - 2) + (-2)(z - 1) = 0;$$

$$x - z + 2 = 0$$

مثال ۲۴.۴.۳. مثلث ABC قاعده هرم $D(2, 2, -\sqrt{3})$ رأس و مثلث $DABC$ را تشکیل می‌دهند. می‌دانیم: $A(0, 0, 0)$ ، $B(0, 1, 1)$ و $C(1, 1, 0)$. مطلوب است محاسبه طول h ، ارتفاع این هرم.

حل. با استفاده از دستور (۲.۶۴)، معادله صفحه‌ای را می‌نویسیم که از سه نقطه A ، B و C می‌گذرد:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + y - z \end{aligned}$$

فاصله نقطه D از صفحه مثلث ABC ، ارتفاع h هرم را به ما می‌دهد:

$$h = \frac{|-2 + 2 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 1$$

صفحه‌های P_1 و P_2 ، با معادله متعارف مختصاتی را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0 \\ P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

صفحه‌های P_1 و P_2 ، تنها وقتی موازی اند که، بردارهای نرمال آنها

$$N_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad N_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

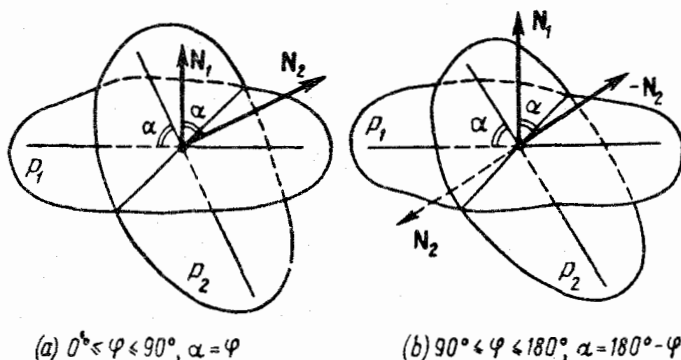
هم راستا باشند؛ یعنی وقتی که عدد $\lambda \neq 0$ وجود داشته باشد، به نحوی که

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \quad (3.50)$$

صفحه‌های P_1 و P_2 ، تنها وقتی برهم عمودند که، بردارهای نرمال آنها، برهم عمود باشند، یعنی

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (3.51)$$

وقتی دو صفحه P_1 و P_2 موازی نباشند، دوجفت فرجه باهم می‌سازند



شکل ۲۹.۳

که، در آن، دو فرجه هر جفت باهم برابرند. زاویه بین دو صفحه P_1 و P_2 بنا به تعریف، کوچکترین فرجه بین آنهاست. زاویه بین دو صفحه موازی را، صفر به حساب می آورند. N_1 و N_2 را، به ترتیب، بردارهای نرمال دو صفحه P_1 و P_2 می گیریم و فرض می کنیم $\varphi = (\vec{N}_1, \vec{N}_2)$. اگر زاویه بین دو صفحه P_1 و P_2 را α بنامیم، به ازای $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ داریم: $\alpha = \varphi$ ، و به ازای $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ داریم: $\alpha = 180^\circ - \varphi$ (شکل ۲۹.۳ - a و b). در هر حالت

$$\cos \alpha = |\cos \varphi| = \frac{|(\vec{N}_1, \vec{N}_2)|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} \quad (3.52)$$

مثال ۲۵.۴.۳. اگر معادله های دو صفحه موازی P_1 و P_2 با (۳.۴۹) داده شده باشند، فاصله بین آنها را پیدا کنید.

حل. فاصله بین دو صفحه موازی P_1 و P_2 عبارت است از فاصله نقطه دلخواه $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P_2$ از صفحه P_1 ؛ یعنی

$$d = \frac{|A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

چون صفحه های P_1 و P_2 موازی اند، عدد λ وجود دارد، به نحوی که

برابری‌های (۳.۵۰) برقرار باشند. به این ترتیب

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0) + D_2 = D_1 - \lambda D_2$$

بنابراین $d = \frac{|D_1 - \lambda D_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$ که، در آن، λ در برابری‌های (۳.۵۰) صدق می‌کند. اگر مثلاً $A_2 \neq 0$ ، آن وقت

$$d = \frac{|A_2 D_1 - A_1 D_2|}{|A_2| \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

مثال ۲۶.۴.۳. نقطه $M_0(1, 1, 1)$ در داخل یکی از چهار فرجه‌ای

قرار دارد که دو صفحه

$$P_1: 8x + 4y + z + 1 = 0, \quad P_2: 2x - 2y + z + 1 = 0$$

باهم تشکیل می‌دهند. مقدار این فرجه را پیدا کنید.

حل. بردارهای نرمال دو صفحه، $N_1 = (8, 4, 1)$ و $N_2 = (2, -2, 1)$

را در نظر می‌گیریم. اگر زاویه‌های دوجهی را، شبیه شکل ۳۰.۳ شماره گذاری کنیم، با توجه به نابرابری‌های

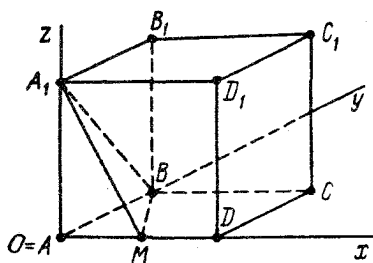
$$d_{P_1}(M_0) = \frac{8 \times 1 + 4 \times 1 + 1 + 1}{\sqrt{64 + 16 + 1}} > 0,$$

$$d_{P_2}(M_0) = \frac{2 \times 1 - 2 \times 1 + 1 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} > 0.$$

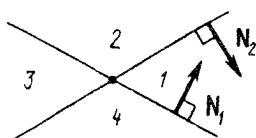
نقطه M_0 در درون زاویهٔ ۱ قرار دارد که مقدار آن، با توجه به قضیهٔ مربوط

به زاویه‌های با ضلع‌های عمود برهم، برابر است با

$$180^\circ - \widehat{(N_1, N_2)} = 180^\circ - \arccos \frac{(N_1, N_2)}{|N_1| \cdot |N_2|} =$$



شکل ۳۱.۳



شکل ۳۰.۳

$$= 180^\circ - \arccos \frac{1}{3}$$

مثال ۳۰.۴.۳. مطلوب است زاویه α ، بین صفحه‌های

$$P_1: 4x + 2y - 2z + 5 = 0, \quad P_2: -x + y + 2z - 3 = 0$$

حل. داریم: $N_1 = (-1, 1, 2)$ ، $N_2 = (4, 2, -2)$ ، با توجه به دستور $(N_1, N_2) = -6$ ، $|N_1| = \sqrt{6}$ ، $|N_2| = 2\sqrt{6}$ (۳.۵۲) به دست می‌آید:

$$\cos \alpha = \left| \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} \right| = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ$$

مثال ۳۱.۴.۳. در مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ، صفحه‌ای را در نظر بگیرید که از رأس‌های A_1 و B و نقطه M وسط یال $[AD]$ گذشته است. زاویه بین این صفحه و وجه $A_1 B_1 C_1 D_1$ را پیدا کنید. حل. طول یال مکعب را واحد و دستگاه مختصات $\{A, \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AA_1}\}$ را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات قائم داریم (شکل ۳۱.۳):

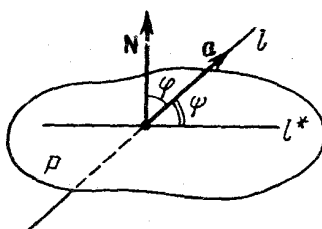
$$A_1(0, 0, 1), \quad B(0, 1, 0), \quad M\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

با توجه به دستور (۳.۴۵)، معادله صفحه (A, BM) به صورت

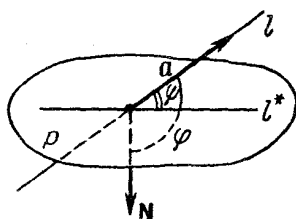
$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

درمی آید، که بردار نرمال آن $N_1 = (1, 1, 1)$ است. صفحه (A, B, C, D_1) با صفحه Oxy موازی و، معادله آن، $z = 1$ است که، در نتیجه، بردار نرمال آن، $N_2 = (0, 0, 1)$ می شود. به این ترتیب

$$\cos \alpha = \left| \frac{(N_1, N_2)}{|N_1| \cdot |N_2|} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$$



(a) $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ, \psi = 90^\circ - \varphi$



(b) $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ, \psi = \varphi - 90^\circ$

شکل ۳۲.۳

زاویه بین خط راست l و صفحه P ، به زاویه ψ بین خط راست l و تصویر قائم آن l^* ، بر صفحه P ، گویند. اگر a بردار هادی l و N بردار نرمال صفحه P باشد، آن وقت $\varphi = (a, N)$ و زاویه های ψ و φ به ترتیب زیر به هم مربوط اند (شکل ۳۲.۳):

اگر $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ، آن گاه $\psi = 90^\circ - \varphi$ ؛

اگر $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ، آن گاه $\psi = \varphi - 90^\circ$.

بنابراین، زاویه ψ ، از دستور زیر به دست می آید:

$$\sin \psi = |\cos \varphi| = \frac{|(a, N)|}{|a| \cdot |N|} \quad (۳.۵۳)$$

مثال ۳۰۴.۳. به ازای چه مقداری از m ، زاویه بین خط راست

به معادله‌های $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}$ و صفحه به معادله $mx + y + z + 4 = 0$

برابر ۴۵ درجه می‌شود؟

حل. بنا بر دستور (۳.۵۳) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \psi = \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{N}|}$$

که در آن $|\mathbf{N}| = \sqrt{m^2 + 2}$ ، $\mathbf{N} = (m, 1, 1)$ ، $|\mathbf{a}| = \sqrt{6}$ ، $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$ و $(\mathbf{a}, \mathbf{N}) = 2m$ بنا بر این

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|2m|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2 + 2}} \iff m = \pm \sqrt{6}$$

مثال ۳۰۴.۳. در هرم منتظم $SABCD$ (به رأس S)، اندازه زاویه

مسطحه هریک از فرجه‌های مجاور قاعده، برابر است با ۳۰ درجه. نقطه‌های

M ، N ، P و Q را، به ترتیب، وسط ضلع‌های $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ و

$[DA]$ ، گرفته‌ایم. نقطه E بر ضلع $[AB]$ و نقطه F بر یال $[SC]$ واقع است.

می‌دانیم، زاویه بین خط راست (EF) با صفحه (SMP) ، زاویه بین خط

راست (EF) با صفحه (SBA) و زاویه بین خط راست (DF) و صفحه

(SNQ) ، هر سه باهم برابرند. اندازه α ، هریک از این سه زاویه را پیدا کنید.

حل. مرکز مربع $ABCD$ را O می‌نامیم. نصف پاره خط راست $[AB]$

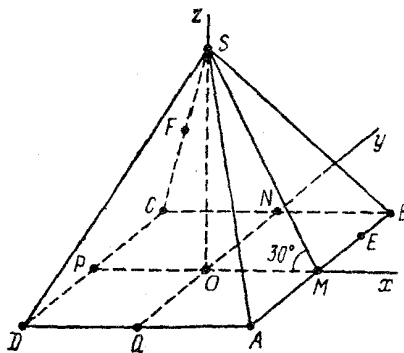
را به عنوان واحد طول و $\left\{ O, \vec{OM}, \vec{ON}, \vec{OS}, \frac{\vec{OS}}{|\vec{OS}|} \right\}$ را به عنوان دستگاه

مختصات قوائم در نظر می‌گیریم (شکل ۳۳.۳)، در این دستگاه مختصات داریم:

$$M(1, 0, 0), P(-1, 0, 0), N(0, 1, 0), Q(0, -1, 0),$$

$$A(1, -1, 0), B(1, 1, 0), C(-1, 1, 0), D(-1, -1, 0),$$

$$S(0, 0, h), E(1, m, 0), F(-\lambda, \lambda, (1-\lambda)h)$$



شکل ۳۳-۳

که در آن‌ها، h ، λ و m نامعلوم‌اند و، در ضمن، داریم:

$$h = \frac{|OS|}{|OM|}, \quad \lambda = \frac{|FS|}{|SC|} \in [0, 1]$$

معادله صفحه‌ها، چنین‌اند:

$$P_1 = (ABCD): z = 0; \quad P_2 = (SMP): y = 0;$$

$$P_3 = (SNQ): x = 0;$$

$$P_4 = (SBA): 0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-h \\ 1-0 & 1-0 & 0-h \\ 1-0 & -1-0 & 0-h \end{vmatrix} =$$

$$= -2hx - 2(z-h) \Leftrightarrow hx + z - h = 0$$

و بردارهای نرمال این صفحه‌ها، به ترتیب:

$$N_1 = (0, 0, 1), \quad N_2 = (0, 1, 0), \quad N_3 = (1, 0, 0), \quad N_4 = (h, 0, 1)$$

و بردارهای هادی خط‌های راست:

$$(EF): \mathbf{a} = \vec{EF} = (-\lambda - 1, \lambda - m, (1 - \lambda)h);$$

$$(DF): \mathbf{b} = \vec{DF} = (-\lambda + 1, \lambda + 1, (1 - \lambda)h)$$

با توجه به فرض‌ها و بنا به دستوره‌ای (۳.۵۲) و (۳.۵۳) داریم:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \frac{|(N_1, N_2)|}{|N_1| \cdot |N_2|} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + 1}} \Leftrightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{|(a, N_2)|}{|a| \cdot |N_2|} = \frac{|(a, N_1)|}{|a| \cdot |N_1|} = \frac{|(b, N_2)|}{|b| \cdot |N_2|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\lambda - m|}{\sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda - m)^2 + (1 - \lambda)^2 h^2}} =$$

$$= \frac{|2h\lambda|}{\sqrt{h^2 + 1} \cdot \sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda - m)^2 + (1 - \lambda)^2 h^2}} =$$

$$= \frac{|1 - \lambda|}{\sqrt{(1 - \lambda)^2 + (\lambda + 1)^2 + (1 - \lambda)^2 h^2}}$$

که با توجه به مقدار $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} |\lambda - m| = \lambda, \\ \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda + 1)^2 + \lambda^2 + (1 - \lambda)^2}} = \frac{1 - \lambda}{\sqrt{(\lambda + 1)^2 + 4(1 - \lambda)^2}} \end{cases}$$

از معادله اول دستگاه، به دست می‌آید: $m = 0$ یا $m = 2\lambda$ و λ را می‌توان

از معادله دوم به دست آورد: $\lambda = \frac{1}{4}$. به این ترتیب، مسأله دو جواب دارد:

$$m = 0, \lambda = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad m = 1, \lambda = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \alpha = \frac{(1-\lambda)}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2(h^2+1)}} = \sqrt{\frac{3}{31}},$$

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{3}{31}}$$

مثال ۳۱۰۴۰۳. معادله‌های پارامتری فصل مشترك این دو صفحه را

پیدا کنید:

$$4x + y - 6z - 2 = 0, \quad y - 3z + 2 = 0$$

حل. t را پارامتر و $z = 4t$ می‌گیریم. از معادله دوم به دست می‌آید:

$y = 12 - 2$ و سپس از معادله اول $x = 1 + 3t$. بنابراین، معادله‌های خط راست فصل مشترك، چنین‌اند:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{12} = \frac{z}{4} = t$$

مثال ۳۲۰۴۰۳. زاویه بین دو خط راست l و L را پیدا کنید:

$$l: \begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}, \quad L: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

حل. معادله پارامتری خط راست l را پیدا می‌کنیم. بیا فرض $z = t$

به عنوان پارامتر، از حل دستگاه

$$3x + y = t - 1, \quad 3x - y = -t$$

به دست می‌آید: $x = -\frac{1}{6}$, $y = t - \frac{1}{3}$. بنابراین، معادله پارامتری خط

راست l ، چنین است:

$$x = -\frac{1}{6} + 0 \cdot t, \quad y = -\frac{1}{3} + 1 \cdot t, \quad z = 0 + 1 \cdot t$$

و بردار هادی آن $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$ است.

برای خط راست L ، τ را پارامتر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $y = 5\tau$ ؛

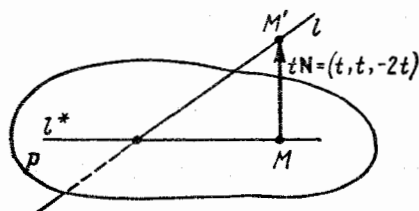
که از آنجا به دست می‌آید: $x = -1 + 5t$ و $z = -\frac{1}{5} + 4t$ ؛ و بردار

هادی خط راست L ، به صورت $\mathbf{b} = (5, 5, 4)$ درمی‌آید. به این ترتیب

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{9}{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{66})} = \frac{3\sqrt{3}}{(2\sqrt{11})}; \quad \varphi = \arccos \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{11}}$$

مثال ۳۳.۴.۳. l^* را تصویر قائم خط راست $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

بر صفحه $P: x + y - 2z + 4 = 0$ می‌گیریم. معادله‌های l^* را پیدا کنید.



شکل ۳۴.۳

حل. نقطه $M(x, y, z)$ تنها وقتی بر خط راست l^* قرار دارد که $M \in P$ (شکل ۳۴.۳: $a: x + y - 2z + 4 = 0$)، یعنی $b: x + y - 2z + 4 = 0$ به ازای مقداری مثل t ، نقطه $M'(x+t, y+t, z-2t)$ بر خط راست l واقع باشد، یعنی به این ترتیب، به دستگاه معادله‌های زیر $\frac{x+t-1}{1} = \frac{y+t+1}{-1} = \frac{z-2t}{2}$

می‌رسیم:

$$x + y - 2z + 4 = 0, \quad x + y = -2t, \quad 2y + z + 2 = 0$$

که از آنجا به دست می‌آید:

$$x = 2 - \frac{5}{2}t, \quad y = -2 + \frac{1}{2}t, \quad z = 2 - t$$

که همان معادله پارامتری خط راست l^* است. معادله متعارف l^* چنین است:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

مثال ۳.۴۰.۴.۳. مختصات Q ، تصویر نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ را بر صفحه

P به معادله

$$P: Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

و بردار $\overrightarrow{M_0Q}$ را پیدا کنید. معادله‌های خط راست (M_0Q) را بنویسید.

حل. بردار $N = (A, B, C)$ بر صفحه P عمود است، بنابراین،

معادله‌های خط راست $l = (M_0Q)$ که بر صفحه P عمود است، به این صورت درمی‌آید:

$$x = x_0 + At, \quad y = y_0 + Bt, \quad z = z_0 + Ct, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.54)$$

نقطه $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ روی این عمود قرار دارد، یعنی عدد t_Q وجود دارد به نحوی که داشته باشیم:

$$x_Q = x_0 + At_Q, \quad y_Q = y_0 + Bt_Q, \quad z_Q = z_0 + Ct_Q$$

چون $Q \in P$ ، بنابراین $Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D = 0$. از آن جا، با توجه به مقدارهای x_Q, y_Q, z_Q ، به دست می‌آید:

$$t_Q = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

و در نتیجه

$$x_Q = \frac{(B^2 + C^2)x_0 - AB y_0 + AC z_0 - AD}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y_Q = \frac{-AB x_0 + (A^2 + C^2)y_0 - BC z_0 - BD}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z_Q = \frac{-AC x_0 - BC y_0 + (A^2 + B^2)z_0 - CD}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$\overrightarrow{M_0 Q} = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \mathbf{N}$$

و بنابر (۳.۵۴)، معادله‌های خط راست $(M_0 Q)$ چنین‌اند:

$$(M_0 Q): \frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

مثال ۳.۵۰.۴.۳. مطلوب است مختصات نقطه M^* ، قرینه $M_0(۱, ۲, ۳)$

نسبت به صفحه P به معادله $۲x - ۳y + ۵z - ۶۸ = ۰$

حل. نقطه $M^*(x^*, y^*, z^*)$ ، برخط راست l قرار دارد که از نقطه M_0

بر صفحه P عمود شده باشد. معادله‌های خط راست l ، چنین‌اند:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$$

و در نتیجه: $x^* = 1 + 2t$, $y^* = 2 - 3t$, $z^* = 3 + 5t$ (برای مقداری

از t). نقطه $Q(\frac{1+x^*}{2}, \frac{2+y^*}{2}, \frac{3+z^*}{2})$ ، وسط پاره‌خط راست

$[M_0 M^*]$ ، بر صفحه P قرار دارد، بنابراین

$$0 = 2 \times \frac{1+x^*}{2} - 3 \times \frac{2+y^*}{2} + 5 \times \frac{3+z^*}{2} - 68 = 19t - 57$$

از آن‌جا $t = 3$, $x^* = 7$, $y^* = -7$, $z^* = 18$.

مثال ۳.۶۰.۴.۳. در مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ، نقطه M وسط یال

$[AD]$ است. زاویه بین فصل مشترک صفحه‌های $(AB_1 D_1)$ و $(A_1 MC_1)$

را با وجه $ABCD$ پیدا کنید.

حل. طول یال مکعب را، واحد و دستگاه مختصات قائم

$$\{A_1, \overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_1 D_1}, \overrightarrow{A_1 A}\}$$

را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات، داریم:

$$A_1(0, 0, 0), B_1(1, 0, 0), C_1(1, 1, 0), D_1(0, 1, 0),$$

$$A(0, 0, 1), M\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

و برای معادله صفحه‌ها، به دست می‌آید:

$$(AB, D): \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1;$$

$$(A, MC): 0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & \frac{1}{2}-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = -x + y - \frac{1}{2}z;$$

$$(ABCD): z = 1; N = (0, 0, 1)$$

اگر $t = \frac{1}{4}z$ را، پارامتر بگیریم، معادله‌های پارامتری خط راست l ، فصل

مشترك صفحه‌های (AB, D) و (A, MC) به دست می‌آیند:

$$x = 1 - 4t - y, \quad x = y - 2t \iff 1 - 4t - y = y - 2t$$

و از آن‌جا: $y = \frac{1}{2} - t$ و $x = \frac{1}{2} - 3t$ ($z = 4t$) به این ترتیب، بردارهای

خط راست l : $a = (-3, -1, 4)$ ؛ و زاویه موردنظر Φ ، با توجه به دستور

(۳.۵۳)، چنین می‌شود:

$$\sin \Phi = \frac{|(a, N)|}{|a| \cdot |N|} = \frac{4}{\sqrt{26}}; \quad \Phi = \arcsin \sqrt{\frac{2}{13}}$$

مثال ۳۷.۴۰۳. در هرم $SABC$ ، همه زاویه‌های رأس S ، قائمه و طول

بال‌های جانبی $[SA]$ ، $[SB]$ و $[SC]$ ، به ترتیب، برابرند با a ، b و c .

طول ارتفاع $h = |SH|$ از هرم را پیدا کنید.

حل. دستگاه مختصات قائم $\left\{S, \frac{\vec{SA}}{a}, \frac{\vec{SB}}{b}, \frac{\vec{SC}}{c}\right\}$ را در نظر می‌گیریم.

در این دستگاه مختصات، داریم:

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$$

با توجه به دستور (۳.۴۵)، معادله صفحه (ABC) ، چنین است:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

طول ارتفاع h ، برابر است با فاصله نقطه $S(0, 0, 0)$ از صفحه (ABC) :

$$h = |SH| = \frac{\left| \frac{0}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

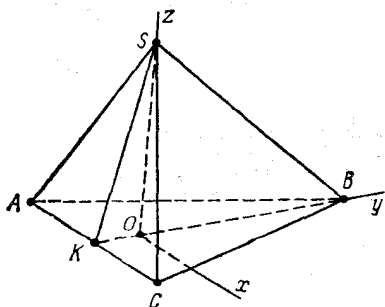
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad \text{و از آنجا:}$$

مثال ۳۸.۴.۳. ضلع‌های $[AB]$ و $[AC]$ از مثلث قائم الزاویه ABC ،

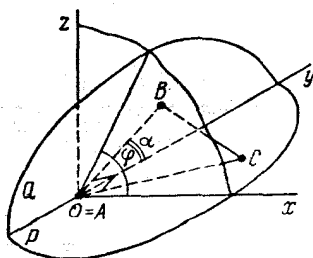
به ترتیب، بروجه‌های P و Q از فرجه حاده با زاویه مسطحه φ قرار دارند.

خط راست (AB) بسا یال این فرجه، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. زاویه Φ ،

بین این یال و خط راست (AC) را پیدا کنید.



شکل ۳۶.۳



شکل ۳۵.۳

حل. مبدا O از دستگاه مختصات قائم را، منطبق بر A می گیریم. محور y را بر فصل مشترك دو وجه فرجه (شکل ۳۵.۳) و محور x را بر وجه P از این فرجه می گیریم. جهت محور z را طوری انتخاب می کنیم که، مختص z ، برای نقطه های نیم صفحه Q ، مثبت باشد. در این صورت، معادله صفحه شامل Q ، چنین است:

$$-xtg\varphi + z = 0$$

اگر فرض کنیم $B(x_B, y_B, z_B)$ ، از شرط $B \in Q$ نتیجه می شود:

$$z_B = x_B t g \varphi$$

زاویه بین بردارهای $\vec{OB}$ و $\vec{j}$ برابر α است:

$$\cos \alpha = \frac{y_B}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}}$$

بنا بر این

$$y_B^2 (1 - \cos^2 \alpha) = (x_B^2 + z_B^2) \cos^2 \alpha = \frac{x_B^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}$$

$$(\vec{OB}, \vec{OC}) = 0 \text{ در شرط } C(x_C, y_C, 0) \text{ نقطه } |y_B| = \frac{|x_B| \cot \alpha}{\cos \varphi} \text{ یعنی}$$

$$\frac{|x_C|}{|y_C|} = \frac{|y_B|}{|x_B|} = \frac{\cot \alpha}{\cos \varphi} \text{ در نتیجه } x_B x_C + y_B y_C = 0 \text{ یعنی،}$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \left| \frac{(\vec{OC}, \vec{j})}{|\vec{OC}| \cdot |\vec{j}|} \right| = \frac{|y_C|}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_C}{y_C}\right)^2 + 1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cot \alpha}{\cos \varphi}\right)^2 + 1}}; \end{aligned}$$

$$tg \Phi = \frac{\cot \alpha}{\cos \varphi}; \quad \Phi = \arctg \frac{\cot \alpha}{\cos \varphi}$$

مثال ۳۹.۴۰۳. در هرم منتظم $SABC$ ، طول ضلع قاعده ABC برابر a ، و زاویه α بین سهم هرم و وجه جانبی آن برابر ۴۵ درجه است. طول h ، ارتفاع هرم را پیدا کنید.

حل. مرکز قاعده ABC را O می‌نامیم و به عنوان مبدا مختصات قائم در نظر می‌گیریم (شکل ۳۶.۳). محورها Ox ، Oy و Oz را، به ترتیب، در جهت بردارهای $\vec{OB}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{OS}$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت، داریم:

$$S(0, 0, h), A\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}, 0\right),$$

$$B\left(0, \frac{a}{\sqrt{3}}, 0\right), C\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}, 0\right)$$

و معادله صفحه (BSC) چنین می‌شود:

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-\frac{a}{\sqrt{3}} & z-0 \\ 0-0 & 0-\frac{a}{\sqrt{3}} & h-0 \\ \frac{a}{2}-0 & -\frac{a}{2\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{3}} & 0-0 \end{vmatrix} =$$

$$= a \left[\frac{h\sqrt{3}}{2}x - \frac{h}{2}\left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \frac{a}{2\sqrt{3}}z \right]$$

بردار نرمال این صفحه $\mathbf{N} = \left(\frac{h\sqrt{3}}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$ و $|\mathbf{N}| = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$. بنابر دستور (۳.۵۳) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \alpha = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{N}|} = \frac{ah \frac{\sqrt{3}}{2}}{h^2 + \frac{a^2}{12}}$$

به معادله $h^2 - h \frac{a\sqrt{6}}{4} + \frac{a^2}{12} = 0$ می‌رسیم که دو جواب دارد:

$$h_1 = \frac{a}{\sqrt{6}}, \quad h_2 = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

مثال ۴۰.۴۰.۳. مثلث متساوی الاضلاع ABC ، قاعده هرم $SABC$ را

تشکیل می‌دهد. می‌دانیم وجه SAB بر صفحه قاعده عمود است و، در ضمن، داریم: $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 45^\circ$. زاویه‌های مثلث SAC را پیدا کنید.

حل. O را وسط $[AB]$ و M را پای عمود وارد از نقطه S بر صفحه

ABC می‌گیریم [چون صفحه‌های (ASB) و (ABC) برهم عمودند،

$[M \in (AB)]$ طول پاره خط راست

$[OB]$ را، به عنوان واحد طول انتخاب

می‌کنیم و دستگاه مختصات قائم

$$\left\{ O, \frac{\vec{OC}}{\sqrt{3}}, \vec{OB}, \frac{\vec{MS}}{|\vec{MS}|} \right\}$$

را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷.۳).

در این دستگاه مختصات داریم:

$$A(0, -1, 0), \quad B(0, 1, 0),$$

$$C(\sqrt{3}, 0, 0), \quad S(0, m, h)$$

h و m نامعلوم اند و در رابطه‌های

$$|\vec{MS}| = h|\vec{OB}| \quad \text{و} \quad \vec{OM} = m\vec{OB}$$

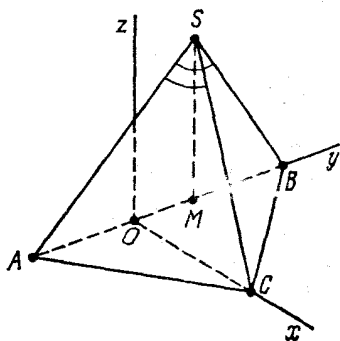
صدق می‌کنند. بنا بر این

$$\vec{SA} = (0, -1, -m, -h),$$

$$\vec{SB} = (0, 1, -m, -h), \quad \vec{SC} = (\sqrt{3}, -m, -h)$$

بنا به فرض داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \widehat{ASB} = \frac{(\vec{SA}, \vec{SB})}{|\vec{SA}| \cdot |\vec{SB}|} = \frac{m^2 - 1 + h^2}{\sqrt{(m+1)^2 + h^2} \cdot \sqrt{(m-1)^2 + h^2}},$$



شکل ۳۷.۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \widehat{ASC} = \frac{(\vec{SA}, \vec{SC})}{|\vec{SA}| \cdot |\vec{SC}|} = \frac{m^2 + m + h^2}{\sqrt{(m+1)^2 + h^2} \cdot \sqrt{3 + m^2 + h^2}}$$

اگر $w = m^2 + h^2$ بگیریم، به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$2(w-1)^2 = (w+2m+1)(w-2m+1), \quad w > 1$$

$$2(w+m)^2 = (w+2m+1)(w+3), \quad w+m > 0$$

با ساده کردن معادله‌ها، به دست می‌آید:

$$w^2 - 6w + 1 + 4m^2 = 0,$$

$$w^2 - 4w + 2mw + 2m^2 - 6m - 3 = 0$$

و اگر دو معادله را از هم کم کنیم:

$$m^2 - m(w-3) + (2-w) = 0$$

$$m = \frac{1}{2}[w-3 \pm (w-1)]/2$$

یعنی با دو حالت روبه‌رو می‌شویم: a ($m = -1$)، b ($m = w-2$).

اگر $m = -1$ ، آن‌گاه $w^2 - 6w + 5 = 0$ و $w = 5$ و $w = 1$ قابل

قبول نیست، زیرا $w > 1$. در این حالت داریم:

$$m = -1, \quad w = 5, \quad h = \sqrt{w - m^2} = 2 \quad (a)$$

در حالت b داریم:

$$5w^2 - 22w + 17 = 0$$

$$h = \sqrt{w - m^2} = \frac{6}{5}, \quad m = \frac{7}{5}, \quad w = \frac{17}{5} \quad \text{یعنی}$$

اکنون به محاسبه زاویه‌های مثلث SAC می‌پردازیم.

a داریم:

$$\vec{AS} = (0, m+1, h) = (0, 0, 2), \quad \vec{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0),$$

$$(\vec{AS}, \vec{AC}) = 0, \widehat{SAC} = 90^\circ$$

و چون $\widehat{ASC} = 45^\circ$ پس $\widehat{SCA} = 45^\circ$

(b) داریم:

$$\vec{AS} = \left(0, \frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right) = \frac{6}{5}(0, 2, 1), \vec{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0),$$

$$\cos \widehat{SAC} = \frac{(\vec{AS}, \vec{AC})}{|\vec{AS}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\frac{6}{5}(0 \times \sqrt{3} + 2 \times 1 + 1 \times 0)}{\frac{6}{5}\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3 + 1 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\widehat{SAC} = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \arctg 2,$$

$$\widehat{SCA} = 180^\circ - 45^\circ - \arctg 2 = \arctg 3$$

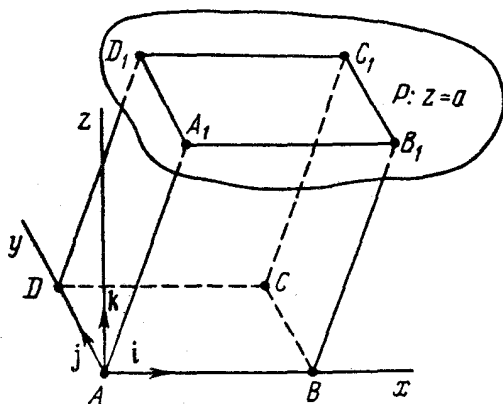
مثال ۴۱.۴۰۳. مستطیل $ABCD$ ، قاعده متوازی السطوح مایل را

تشکیل می دهد. $[AA_1]$ ، $[BB_1]$ ، $[CC_1]$ و $[DD_1]$ یال های جانبی آن هستند. طول ضلع $[AB]$ ، برابر است با طول ارتفاع متوازی السطوح. کره به مرکز O ، از رأس B می گذرد و بر یال های (A_1B_1) و (DD_1) ، به ترتیب، در نقطه های A_1 و D_1 مماس است. مطلوب است نسبت حجم متوازی السطوح به حجم کره، به شرطی که $\widehat{A_1OB} = \widehat{D_1OB} = 120^\circ$

حل. فرض می کنیم: $a = |AB|$ و $b = |AD|$ ، دستگاه مختصات قائم

را، به مبدأ A می گیریم و قرار می دهیم: $\vec{i} = \frac{AB}{|AB|}$ ، $\vec{j} = \frac{AD}{|AD|}$ (شکل

۳۸۰۱). سپس، جهت بردار $\vec{k}$ را طوری مشخص می کنیم که اگر، ابتدای آن، A باشد، انتهای آن در همان طرف از صفحه $(ABCD)$ قرار گیرد که نقطه های A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 قرار دارند. چون طول ارتفاع متوازی السطوح برابر a است، هر چهار نقطه A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 روی صفحه $z = a$ واقع اند. اگر (m, n, a) را مختصات A_1 و $(0, b, 0)$ را مختصات D_1 بگیریم، آن وقت $D_1(m, n+b, a)$ و $B(a, 0, 0)$ خواهد بود. فرض کنید



شکل ۳۸.۳

(x, y, z) مختصات نقطه O ، و شعاع مجهول کره باشد. شرط‌های مسأله را می‌نویسیم:

$$|OB|^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (3.55)$$

$$|OA_1|^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-a)^2 = R^2, \quad (3.56)$$

$$|OD_1|^2 = (x-m)^2 + (y-n-b)^2 + (z-a)^2 = R^2 \quad (3.57)$$

کره در نقطه‌های A_1 و D_1 ، بر (A_1B_1) و (DD_1) مماس است، بنابراین

$$0 = (\vec{OA_1}, \vec{A_1B_1}) = (\vec{OA_1}, \vec{AB}) = (m-x)a \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{OD_1}, \vec{DD_1}) = (\vec{OD_1}, \vec{AA_1}) = \\ &= (m-x)m + (n+b-y)n + (a-z)a \end{aligned} \quad (3.59)$$

و سرانجام

$$-\frac{1}{2} = \cos 120^\circ = \frac{(\vec{OA_1}, \vec{OB})}{|OA_1| \cdot |OB|} = \frac{(\vec{OA_1}, \vec{OB})}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{R^2} [(m-x)(a-x) + (y-n)y + (z-a)z] \quad (3.60)$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{(\vec{OD}, \vec{OB})}{|\vec{OD}| \cdot |\vec{OB}|} =$$

$$= \frac{1}{R^2} [(m-x)(a-x) + (y-n-b)y + (z-a)z] \quad (3.61)$$

از (۳.۵۸) داریم: $m=x$ (۳.۶۱) را از (۳.۶۰) کم می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$y=0 \quad (3.57) \quad \text{را از (3.56) کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود: } n = -\frac{b}{2}$$

اکنون، به این دستگاه می‌رسیم:

$$(x-a)^2 + z^2 = R^2, \quad \frac{b^2}{4} + (z-a)^2 = R^2,$$

$$-\frac{b^2}{4} + a(a-z) = 0, \quad z(z-a) = -\frac{1}{2} R^2$$

از مجموع سه معادله آخر، به دست می‌آید: $2(z-a)^2 = \frac{R^2}{2}$ ، یعنی

$$z-a = \pm \frac{R}{2} \quad \text{سپس } \frac{b^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \quad \text{و } b = R\sqrt{3}$$

$$\frac{b^2}{4} = a(a-z) = \pm \frac{1}{2} aR$$

در این برابری، علامت منفی ممکن نیست، بنابراین $a = \frac{b^2}{2R} = \frac{3R}{2}$ به این

ترتیب، اگر حجم متوازی‌السطوح را V_1 و حجم کره را V_2 بنامیم، داریم:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^2 b}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{27\sqrt{3}}{16}$$

مثال ۴۲.۴.۳. طول یال چهار وجهی منتظم $ABCD$ برابر a است.

E را وسط $[CD]$ و F را وسط ارتفاع (BL) در وجه ABD گرفته ایم. پاره خط راست $[MN]$ ، که دو انتهای آن روی خطهای راست (AD) و (BC) قرار دارد، خط راست (EF) را قطع می کند و بر آن عمود است. طول این پاره خط راست را پیدا کنید.

حل. P را وسط $[BC]$ می گیریم و پایه متعامد $\vec{BC} = \mathbf{b}$ ، $\vec{AD} = \mathbf{a}$ و $\vec{LP} = \mathbf{c}$ را در نظر می گیریم (شکل ۳۹.۳). بنا براین

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0, |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = a, |\mathbf{c}| = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

با توجه به دستور خط میانه برای چهارضلعی فضائی، داریم:

$$\vec{FE} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{LD}) = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{b}}{2}$$

نقطه های M و N ، بر خطهای راست (AD) و (BC) قرار دارند، بنا براین عدهای x و y وجود دارند، به نحوی که $\vec{LM} = y\mathbf{a}$ و $\vec{PN} = x\mathbf{b}$.

در نتیجه

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= -\vec{LM} + \vec{LP} + \vec{PN} = \\ &= -y\mathbf{a} + x\mathbf{b} + \mathbf{c}\end{aligned}$$

شکل ۳۹.۳

دو خط راست (FE) و (MN) برهم عمودند، بنا براین

$$0 = (\vec{FE}, \vec{MN}) = -\frac{1}{4}ya^2 + \frac{1}{4}xb^2 = \frac{a^2}{4}(2x - y)$$

یعنی $y = 2x$. خطهای راست (FE) و (MN) متقاطع اند، یعنی بردارهای

$$\vec{FE} = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}, \quad \vec{MN} = -2xa + xb + c$$

$$\begin{aligned}\vec{ME} &= \vec{MD} + \frac{1}{\gamma} \vec{DC} = \left(\frac{1}{\gamma} - y\right) \mathbf{a} + \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{1}{\gamma} \mathbf{a} + \mathbf{c} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{b}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\gamma} - 2x\right) \mathbf{a} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{b} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{c}\end{aligned}$$

هم‌راستا هستند و، بنابراین معیار هم‌راستایی، داریم:

$$\begin{aligned}0 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} & 0 \\ -2x & x & 1 \\ \frac{1}{\gamma} - 2x & \frac{1}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} x & 1 \\ \frac{1}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} - \\ &- \frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} -2x & 1 \\ \frac{1}{\gamma} - 2x & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix} = \frac{1 - 6x}{16}\end{aligned}$$

بنابراین $x = \frac{1}{6}$ ، $\vec{MN} = \frac{1}{6}(-2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 6\mathbf{c})$ و

$$|\vec{MN}| = \frac{1}{6} \sqrt{4\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 36\mathbf{c}^2} = \frac{\sqrt{23}}{6} a$$

مثال ۴۳.۴۰۳. همهٔ ویژگی‌های ضرب اسکالر را، با استفاده از قانون کسینوس و این که، در پایهٔ متعامد $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ، برای $|\mathbf{a}|$ ، طول بردار $\mathbf{a} = (x, y, z)$ برابر است با $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، نتیجه بگیرید (هم قانون کسینوس و هم رابطهٔ طول بردار $\mathbf{a}$ ، در هندسه، بدون استفاده از اندیشهٔ ضرب اسکالر و ویژگی‌های آن، به‌دست می‌آید).

حل. $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ و $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ می‌گیریم، بنابراین

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

و بنابراین قانون کسینوس

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{1}{2} (|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2) = \frac{1}{2} [(x_1 + x_2)^2 + \\ &+ (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \\ &- (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)] = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\end{aligned}$$

و از آن نتیجه می‌شود: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$. چون $\lambda \mathbf{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ بنا براین

$$(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda x_1) x_2 + (\lambda y_1) y_2 + (\lambda z_1) z_2 = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

سرانجام، اگر $\mathbf{c} = (x'_1, y'_1, z'_1)$ آن‌گاه

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = (x_1 + x'_1, y_1 + y'_1, z_1 + z'_1)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}) &= (x_1 + x'_1) x_2 + (y_1 + y'_1) y_2 + (z_1 + z'_1) z_2 = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + x'_1 x_2 + y'_1 y_2 + z'_1 z_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b})\end{aligned}$$

مثال ۴۴.۴.۳. ثابت کنید، اگر $\mathbf{a} = (x, y, z)$ بردار مفروضی در

پایه متعامد باشد، آن‌گاه $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

حل. دستگاه مختصات قائم $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ و نقطه A را؛ با شرط $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$

یعنی $A(x, y, z)$ در نظر می‌گیریم. خط راستی را در نظر می‌گیریم که از A بگذرد و با محور z موازی باشد و نقطه برخورد آن را با صفحه Oxy ، M می‌نامیم. به همین ترتیب، N را محل برخورد محور y با خط راستی که از M موازی محور x رسم شود (شکل ۴۰.۳) و P را نقطه مشترک محور x با خط راستی که از نقطه M موازی محور y رسم شود، فرض می‌کنیم. بنا به تعریف مختصات، داریم:

$$M(x, y, 0), N(0, y, 0), P(x, 0, 0), \overrightarrow{MA} = z\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{MA}| = |z|, \overrightarrow{ON} = y\mathbf{j}, |\mathbf{ON}| = |\mathbf{PM}| = |y|, \overrightarrow{OP} = x\mathbf{i},$$

$$|\mathbf{OP}| = |\mathbf{MN}| = |x|$$

بردارهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ برهم عمودند، بنا براین یا $M = N$ و یا $\widehat{OMN} = 90^\circ$

$$|AN| = |A'N|, \widehat{ANQ} = \widehat{A'NQ}, |NQ| = |NQ|$$

دو مثلث ANQ و $A'NQ$ برابرند، یعنی مثلث AQA' متساوی الساقین و $[QM]$ ، میانه آن، ارتفاع مثلث هم می شود و زاویه QMA قائمه است. قضیه فیثاغورث را در مثلث OMA به کار می بریم:

$$|OA| = |a| = \sqrt{|OM|^2 + |MA|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

قضیه، به طور کامل ثابت شد.

اندیشه اصلی که در این اثبات، مورد استفاده قرار گرفت، این بود که: اگر خط راست (AM) بر خط های راست (MN) و (MP) واقع در صفحه xOy و غیر موازی با هم، عمود باشد، آن وقت بر خط راست سوم (OM) واقع بر این صفحه هم عمود خواهد بود، یعنی از معیار عمود بودن خط راست بر صفحه، بدون استفاده از ویژگی های ضرب اسکالر.

فصل چهارم

حاصل ضرب برداری دو بردار حاصل ضرب سه گانه عددی

بخش ۱.۴. جهت در صفحه و در فضا

$\{e_1, e_2, e_3\}$ و $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ را، دو پایه در فضا، S را ماتریس انتقال از پایه اول به پایه دوم و S' را ماتریس انتقال از پایه دوم به پایه اول می گیریم (بخش ۶.۲ را ببینید). پایه $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ را وقتی هم جهت با پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ گویند که داشته باشیم: $\det S > 0$ و می نویسند:

$$\{e'_1, e'_2, e'_3\} \sim \{e_1, e_2, e_3\}$$

از ویژگی های ماتریس انتقال (بخش ۶.۲)، نتیجه می شود:

$$(1) \quad \{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$(2) \quad \text{اگر } \{e'_1, e'_2, e'_3\} \sim \{e_1, e_2, e_3\}, \text{ آن گاه}$$

$$\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

در حالتی که، این دو پایه، هم جهت نباشند، آن ها را مختلف ال جهت

گویند و می نویسند:

$$\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

از همان ویژگی های ماتریس انتقال يك پایه به پایه دیگر، همچنین،

نتیجه می شود:

$$(3) \quad \text{اگر } \{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e'_1, e'_2, e'_3\} \text{ و } \{e'_1, e'_2, e'_3\} \sim \{e''_1, e''_2, e''_3\} \text{،}$$

$$\text{آن گاه } \{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e''_1, e''_2, e''_3\}.$$

به این ترتیب، رابطه ~، يك رابطه هم ادزی [ویژگی‌های ۱) تا ۳) را ببینید]، برای مجموعه همه پایه‌ها در فضا است. روشن است که اگر داشته باشیم:

$$\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e'_1, e'_2, e'_3\} \text{ و } \{e''_1, e''_2, e''_3\} \sim \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

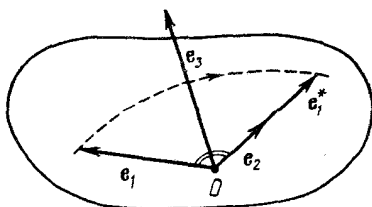
آن گاه داریم: $\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e''_1, e''_2, e''_3\}$. بنابراین، مجموعه پایه‌ها در فضا، به دو مجموعه غیر متقاطع (دو دسته هم‌ارز)، به نحوی تقسیم می‌شوند که، هر پایه، تنها به یکی از دسته‌ها متعلق است. اگر دو پایه، به يك دسته هم‌ارزی تعلق داشته باشند، هم‌جهت؛ و اگر به دو دسته مختلف هم‌ارزی تعلق داشته باشند، مختلف‌الجهت‌اند. یکی از این دسته‌ها را راست‌گرد (و هر پایه متعلق به آن را، پایه راست‌گرد) و پایه‌های متعلق به دسته هم‌ارزی دیگر را، چپ‌گرد گوئیم. دسته راست‌گرد را طوری انتخاب می‌کنند که، هر پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ متعلق به آن، دارای این شرط‌ها باشد:

اگر بردارهای پایه، از يك نقطه رسم شوند، و در ضمن فرض کنیم

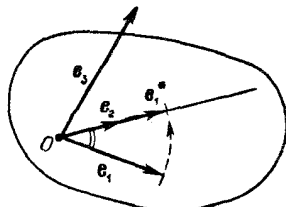
$$e_1^* = \frac{|e_1|}{|e_2|} e_2$$

آن وقت، کمترین مقدار دورانی که برای انطباق e_1 بر e_1^*

لازم است (دوران دور نقطه مبدا بردارهای پایه و در صفحه e_1 و e_2)، در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت (یعنی در جهت مثلثاتی) باشد، به شرطی که از انتهای بردار e_3 ، به این جهت نگاه کنیم (شکل ۱۰۴ و ۲۰۴).



شکل ۲۰۴



شکل ۱۰۴

مثال ۱۰۱۰۴. $\{a, b, c\}$ يك پایه است. ثابت كنيد:

$$۱) \quad \{a, b, -c\} \approx \{a, b, c\};$$

$$۲) \quad \{a, b, c\} \sim \{c, a, b\} \sim \{b, c, a\} \approx \{b, a, c\};$$

$$\{b, a, c\} \sim \{c, b, a\} \sim \{a, c, b\}$$

حل. ۱) ماتريس S ، برای انتقال از پایه $\{a, b, c\}$ ، به پایه $\{a, b, -c\}$ ،

چنين است:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det S = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

$$\{a, b, -c\} \approx \{a, b, c\}$$

۲) ماتريس‌های S_1, S_2, S_3, S_4 و S_5 را، برای انتقال از پایه

$\{a, b, c\}$ ، به ترتيب، به پایه‌های $\{c, a, b\}$ ، $\{b, c, a\}$ ، $\{b, a, c\}$ ، $\{c, b, a\}$ و $\{a, c, b\}$ تشكيل می‌دهيم:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_1 = -1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\{a, b, c\} \sim \{c, a, b\};$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_2 = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\{a, b, c\} \sim \{b, c, a\};$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det S_3 = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\{a, b, c\} \approx \{b, a, c\};$$

$$S_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_{\varphi} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\{b, a, c\} \sim \{c, b, a\};$$

$$S_{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_{\delta} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\{b, a, c\} \sim \{a, c, b\}$$

دو پایه $\{e_1, e_2\}$ و $\{e'_1, e'_2\}$ واقع بر يك صفحه را هم جهت گویند، وقتی که داشته باشیم: $\det S > 0$ و یا هم ارز آن $\det S' > 0$ که، در آن‌ها، S و S' عبارتند از ماتریس‌های انتقال از پایه $\{e_1, e_2\}$ به پایه $\{e'_1, e'_2\}$ و برعکس. وقتی که دو پایه هم جهت باشند، می‌نویسند:

$$\{e_1, e_2\} \sim \{e'_1, e'_2\}$$

شبه حالت سه بعدی، رابطه $\sim$ ، يك رابطه هم ارزی در مجموعه پایه‌ها در صفحه است. این رابطه، مجموعه همه پایه‌های صفحه را، به دو دسته هم ارزی تقسیم می‌کند: دسته پایه‌های راست گرد و دسته پایه‌های چپ گرد. در دوران راست گرد، کوچکترین زاویه دوران، برای انطباق e_1 بر e_2 در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و در حالت چپ گرد در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. از این به بعد، پایه متعامد راست گرد را در فضا (یا در صفحه)، با $\{i, j, k\}$ (یا $\{i, j\}$) نشان خواهیم داد.

دسته پایه‌های راست گرد و متعامد در صفحه (یا در فضا)، به وسیله یکی از نمایندگان خود که، در ضمن، جهت مثبت Δ در صفحه (یا در فضا) تعریف می‌کند، معرفی می‌شود. وقتی پایه راست گرد $\{i, j\}$ (در صفحه) یا $\{i, j, k\}$ (در فضا) مفروض باشد، به معنای این است که جهت مثبت در

صفحه (یا در فضا)، به کمک این پایه، مشخص شده است. در این حالت، صفحه (یا فضا) را، جهت داد، یا توجیه شده گویند. پایه چپ گرد، جهت منفی را در صفحه (یا در فضا) معین می کند.

بخش ۲.۴. تعریف و ویژگی های حاصل ضرب برداری.

شرط هم راستائی.

مساحت مثلث و چهارضلعی

پایه متعامدیکه و راست گرد ثابت $\{i, j, k\}$ را در نظر می گیریم. فرض می کنیم $a = (a_x, a_y, a_z)$ و $b = (b_x, b_y, b_z)$ دو بردار دلخواه باشند. حاصل ضرب برداری دو بردار a و b ، یعنی $[a, b]$ (با رعایت ترتیب)، بنا به تعریف، عبارت است از بردار

$$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) \quad (4.1)$$

با توجه به ویژگی های دترمینان ها، می توان این ویژگی ها را، برای حاصل ضرب برداری، نتیجه گرفت:

۱. ویژگی غیر جابه جایی:

$$[b, a] = -[a, b] \quad (4.2)$$

□ در واقع داریم:

$$[b, a] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -[a, b] \blacksquare$$

۲°. برای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}' = (a'_x, a'_y, a'_z)$ ، $\mathbf{a}'' = (a''_x, a''_y, a''_z)$ و $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ و عددهای دلخواه α و β داریم:

$$\begin{aligned} [\alpha \mathbf{a}' + \beta \mathbf{a}'', \mathbf{b}] &= \alpha [\mathbf{a}', \mathbf{b}] + \beta [\mathbf{a}'', \mathbf{b}], \\ [\mathbf{b}, \alpha \mathbf{a}' + \beta \mathbf{a}'] &= \alpha [\mathbf{b}, \mathbf{a}'] + \beta [\mathbf{b}, \mathbf{a}''] \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

□ بنابر ویژگی دترمینانها داریم:

$$\begin{aligned} [\alpha \mathbf{a}' + \beta \mathbf{a}'', \mathbf{b}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha a'_x + \beta a''_x & \alpha a'_y + \beta a''_y & \alpha a'_z + \beta a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a''_x & a''_y & a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha [\mathbf{a}', \mathbf{b}] + \beta [\mathbf{a}'', \mathbf{b}]; \end{aligned}$$

$$[\mathbf{b}, \alpha \mathbf{a}' + \beta \mathbf{a}'] = -[\alpha \mathbf{a}' + \beta \mathbf{a}'', \mathbf{b}] =$$

$$= -(\alpha [\mathbf{a}', \mathbf{b}] + \beta [\mathbf{a}'', \mathbf{b}]) =$$

$$= -(-\alpha [\mathbf{b}, \mathbf{a}'] - \beta [\mathbf{b}, \mathbf{a}'']) = \alpha [\mathbf{b}, \mathbf{a}'] + \beta [\mathbf{b}, \mathbf{a}'']$$

در اینجا، بارها از ویژگی ۱° استفاده کرده ایم. ■

مثال ۱۰۲.۴. ثابت کنید: $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$.

حل. بنابر ویژگی ۱°: $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{a}]$ ؛ از آنجا

$$2[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0 \iff [\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$$

ویژگی‌های هندسی حاصل ضرب بردار

I. بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ بر هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است.

□ بنابر دستورهای (۳.۳۱) و (۴.۱۱) و بنابر ویژگی ۳° دترمینانها

داریم:

$$\begin{aligned} (a, [a, b]) &= a_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب، برای دو بردار b و $[a, b]$. ■

II. طول بردار $[a, b]$ برابر است با عدد مساحت S از متوازی الاضلاعی

که دوی دو بردار a و b ساخته می شود، یعنی

$$|[a, b]| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\widehat{a, b})$$

□ $\varphi = (\widehat{a, b})$ می گیریم. بنا براین

$$\begin{aligned} S^2 &= |a|^2 |b|^2 \sin^2 \varphi = |a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 = \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \right)^2 - \left(- \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)^2 = |[a, b]|^2 \end{aligned}$$

یعنی $S = |[a, b]|$. ■

III. از تعریف حاصل ضرب برداری دو بردار (که به آن، حاصل ضرب

بیرونی دو بردار هم می گویند) می توان نتیجه گرفت که: بردارهای a و b

تنها وقتی هم راستا هستند که داشته باشیم: $[a, b] = 0$.

IV. اگر بردارهای a و b هم راستا نباشند، آن وقت $\{[a, b]\}$ ، پایه ای

داست گرد است.

□ کافی است ثابت کنیم، در مینان ماتریس انتقال از پایه $\{i, j, k\}$

به پایه $\{a, b, [a, b]\}$ ، مثبت است. فرض می کنیم

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad c_y = - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

مختصات بردار $[a, b]$ باشند. بنابراین

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = |[a, b]|^2 > 0$$

بنابراین، بردارهای a و b هم راستا نیستند. ■

با توجه به ویژگی‌های I تا IV، برای بردارهای مفروض a و b ، بردار $[a, b]$ ، به عنوان برداری منحصر به فرد تعریف می‌شود:

اگر a و b موازی باشند، بنا بر ویژگی III: $[a, b] = 0$ ؛

اگر $a \neq b$ ، آن گاه، بنا بر ویژگی I، بردار $[a, b]$ بر صفحه P ، که دو بردار a و b پایه‌ای را در آن تشکیل می‌دهند، عمود است و، بنابراین، خط راست منحصری را مشخص می‌کند که بردار $[a, b]$ موازی آن است؛ طول بردار $[a, b]$ ، بنا بر ویژگی II، برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع‌ی که روی دو بردار a و b ساخته می‌شود، و امتداد بردار $[a, b]$ ، بنا بر ویژگی IV، با این شرط معین می‌شود که پایه $\{a, b, [a, b]\}$ پایه‌ای راست گرد است.

به این ترتیب، I تا IV را می‌توان به عنوان تعریف حاصل ضرب برداری (یا حاصل ضرب بیرونی) دو بردار در نظر گرفت. این تعریف، تنها بردار $[a, b]$ را معین می‌کند که با دستور (۴.۱) سازگار است. تأکید می‌کنیم که، به طور معمول، حاصل ضرب برداری را به کمک ویژگی‌های I تا IV تعریف می‌کنند و، سپس، دستور (۴.۱) را از آن نتیجه می‌گیرند تا در محاسباتها مورد استفاده قرار گیرد.

مثال ۲۰۲.۴. اگر $a = (-1, 0, 1)$ و $b = (2, 1, 3)$ در پایه

فضائی $\{i, j, k\}$ مفروض باشند، $[a, b]$ را پیدا کنید.
حل. بنا بر دستور (۴.۱) داریم:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \\ + k \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 5, -1)$$

مثال ۳.۲۰۴. $\{i', j', k'\}$ را، پایه‌ای متعامد و راست گرد می‌گیریم.
اگر مختصات بردارهای a و b نسبت به این پایه را

$$a = (a'_x, a'_y, a'_z), \quad b = (b'_x, b'_y, b'_z)$$

فرض کنیم، ثابت کنید:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix}$$

یعنی، شکل عبارت سمت راست دستور (۴.۱)، مستقل از انتخاب پایه است.
حل. بردار $[i', j']$ طولی برابر واحد دارد (ویژگی II) و بر هر دو بردار i' و j' عمود است (ویژگی I)؛ در ضمن، $\{i', j', [i', j']\}$ پایه‌ای راست گرد است (ویژگی IV). بنابراین، بردار $[i', j']$ همان بردار k' است: $[i', j'] = k'$. به همین ترتیب

$$[j', k'] = i', \quad [k', i'] = j'$$

چون $a = a'_x i' + a''$ که در آن $a'' = a'_y j' + a'_z k'$ ، بنا بر ویژگی ۲° داریم:

$$[a, b] = a'_x [i', b] + [a'', b] = \\ = a'_x [i', b] + a'_y [j', b] + a'_z [k', b]$$

به جز این، در نظر می‌گیریم: $b'' = b'_y j' + b'_z k'$ ، با توجه به ویژگی ۲°،

به دست می آید:

$$\begin{aligned} [\mathbf{i}', \mathbf{b}] &= [\mathbf{i}', b'_x \mathbf{i}'] + [\mathbf{i}', \mathbf{b}'] = b'_x [\mathbf{i}', \mathbf{i}'] + \\ &+ b'_y [\mathbf{i}', \mathbf{j}'] + b'_z [\mathbf{i}', \mathbf{k}'] = b'_y [\mathbf{i}', \mathbf{j}'] - b'_z [\mathbf{k}', \mathbf{i}'] = \\ &= b'_y \mathbf{k}' - b'_z \mathbf{j}' \end{aligned}$$

و به همین ترتیب

$$[\mathbf{j}', \mathbf{b}] = -b'_x \mathbf{k}' + b'_z \mathbf{i}', [\mathbf{k}', \mathbf{b}] = b'_x \mathbf{j}' - b'_y \mathbf{i}'$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= a'_x (b'_y \mathbf{k}' - b'_z \mathbf{j}') + a'_y (-b'_x \mathbf{k}' + b'_z \mathbf{i}') + \\ &+ a'_z (b'_x \mathbf{j}' - b'_y \mathbf{i}') = \mathbf{i}' (a'_y b'_z - a'_z b'_y) - \\ &- \mathbf{j}' (a'_x b'_z - a'_z b'_x) + \mathbf{k}' (a'_x b'_y - a'_y b'_x) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

P را صفحه‌ای ثابت و $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ را پایه متعامد یک‌در صفحه P فرض می‌کنیم و $\mathbf{a} = a'_x \mathbf{i}' + a'_y \mathbf{j}'$ و $\mathbf{b} = b'_x \mathbf{i}' + b'_y \mathbf{j}'$ را، بردارهایی موازی صفحه P می‌گیریم. اگر قرار دهیم: $k' = [\mathbf{i}', \mathbf{j}']$ ، آن وقت $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', k'\}$ پایه‌ای راست‌گرد در فضا می‌شود (ویژگی IV). در این پایه داریم:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, 0),$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & k' \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, a_x b_y - b_x a_y)$$

بنابراین، مساحت S از متوازی‌الاضلاعی که در صفحه P قرار دارد و روی

بردارهای $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i}' + a_y \mathbf{j}'$ و $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i}' + b_y \mathbf{j}'$ ساخته شده، برابر است با

$$S = |a_x b_y - a_y b_x| \quad (۴.۴)$$

در این بخش همه جا، به جز در مورد های خاصی که مورد تأکید قرار گیرد، مختصات بردارها را نسبت به پایه متعامد راست گرد $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (و برای صفحه، نسبت به پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$) و مختصات نقطه ها را در دستگاه مختصات متناظر با آن $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (و در صفحه، $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$) در نظر می گیریم.

مثال ۴.۴.۴. تحقیق کنید، بردارهای

$$\mathbf{a} = (۱, ۵, -۱), \mathbf{b} = (-۱, ۱, ۵), \mathbf{c} = (۲, ۵, -۳)$$

هم صفحه نیستند. بردار واحد $\mathbf{d}$ را طوری پیدا کنید که بر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود باشد و، درضمن، داشته باشیم:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$$

حل. داریم:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۵ \\ -۱ & ۵ & -۳ \end{vmatrix} =$$

$$= ۱ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۵ & -۳ \end{vmatrix} - (-۱) \begin{vmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & -۳ \end{vmatrix} + ۲ \begin{vmatrix} ۵ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix} = -۱ < ۰$$

بنابراین، بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه نیستند و پایه $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ چپ گرد است. بردار مورد نظر $\mathbf{d}$ بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است، بنابراین $\mathbf{d}$ با بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ موازی است. چون $|\mathbf{d}| = ۱$ ، تنها دو حالت ممکن است:

$$\mathbf{d}_1 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|} \quad \text{یا} \quad \mathbf{d}_2 = -\mathbf{d}_1 = -\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|}$$

بنابر ویژگی IV، پایه $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}$ و، بنابراین، پایه جهت دار هم ارز با آن $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}_1\}$ ، راست گرد هستند. از آن جا که

$$\{a, b, -d\} \sim \{a, b, d\}$$

بنابراین $\{a, b, d\}$ پایه ای چپ گرد است، یعنی

$$\{a, b, d\} \sim \{a, b, c\}$$

به این ترتیب، بردار مورد نظر d ، همان بردار d است و داریم:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1), \quad |[a, b]| = \sqrt{3}$$

و از آن جا: $d = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

مثال ۵.۲.۴. مساحت متوازی الاضلاعی را پیدا کنید که روی بردارهای

$a = (-1, 3)$ و $b = (1, 2)$ ساخته شده است.

حل. با توجه به دستور (۴.۴) داریم:

$$S = |(-1) \times 2 - 3 \times 1| = 5$$

مثال ۶.۲.۴. مساحت مثلثی را پیدا کنید که، رأس های آن، در نقطه های

$A(-1, 0, -1)$ ، $B(0, 2, -3)$ و $C(4, 4, 1)$ واقع باشند.

حل. مساحت مثلث ABC ، برابر است با نصف مساحت متوازی اضلاعی

که روی بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ ساخته شده است:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2} \quad (4.5)$$

که در آن $a_x = 1$ ، $a_y = 2$ ، $a_z = -2$ و $b_x = 5$ ، $b_y = 4$ ، $b_z = 2$ به ترتیب، مختصات بردارهای $a = \vec{AB}$ و $b = \vec{AC}$ هستند. از این جا

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + (-12)^2 + (-6)^2} = 9$$

مثال ۰۷۰۲۰۴. بردارهای a و b مفروض اند. بردارهای

$$۱) [a+b, a-b], \quad ۲) \left[\frac{a+b}{2}, b-\frac{a}{2} \right]$$

را بر حسب بردار $c = [a, b]$ پیدا کنید.

حل. بنا بر ویژگی خطی حاصل ضرب برداری، داریم:

$$\begin{aligned} ۱) [a+b, a-b] &= [a, a-b] + [b, a-b] = \\ &= [a, a] - [a, b] + [b, a] - [b, b] = \\ &= 0 - [a, b] - [a, b] - 0 = -2c \end{aligned}$$

که در آن، از رابطه (۴.۲) و نتیجه مثال ۱.۲.۴ استفاده کرده ایم.

۲) به همین ترتیب، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \left[\frac{a+b}{2}, b-\frac{a}{2} \right] &= \frac{1}{2} \left[a, b-\frac{a}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[b, b-\frac{a}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} [a, b] - \frac{1}{4} [a, a] + \frac{1}{2} [b, b] - \frac{1}{4} [b, a] = \\ &= \frac{1}{2} c - \frac{1}{4} (-c) = \frac{3}{4} c \end{aligned}$$

مثال ۰۸۰۲۰۴. برای سه بردار غیر صفر a, b و c می دانیم:

$$a = [b, c], \quad b = [c, a], \quad c = [a, b]$$

طول این سه بردار و، همچنین، زاویه های بین آن ها را پیدا کنید.

حل. چون $a = [b, c]$ ، پس $a \perp b$ و $a \perp c$ و، جز آن، چون

$b = [c, a]$ ، پس $b \perp c$ ؛ یعنی این سه بردار دوه دو برهم عمودند. در ضمن

داریم:

$$|a| = |b| \cdot |c| \sin(\widehat{b, c}) = |b| \cdot |c|,$$

$$|b| = |c| \cdot |a|, \quad |c| = |a| \cdot |b|$$

از ضرب این سه رابطه درهم، به دست می آید:

$$|a| \cdot |b| \cdot |c| = 1$$

و چون $|b| \cdot |c| = |a|$ ، بنا براین $|a|^2 = 1$ و $|a| = 1$ به همین ترتیب، به دست می آید: $|b| = |c| = 1$. چون $c = [a, b]$ ، بنا براین پایه $\{a, b, c\}$ ، پایه ای متعامد، یکه و راست گرد است.

مثال ۹.۲.۴. ثابت کنید، اگر سه بردار a, b و c ، دو به دو هم راستا نباشند، آن گاه دو شرط زیر هم ارزند:

$$[a, b] = [b, c] = [c, a] \quad \text{و} \quad a + b + c = 0$$

حل. ابتدا فرض می کنیم $a + b + c = 0$. اگر حاصل ضرب برداری این برابری را در بردار a پیدا کنیم، به دست می آید:

$$[a, a] + [a, b] - [c, a] = 0 \iff [a, b] = [c, a]$$

و اگر برابری $a + b + c = 0$ را در بردار b ، ضرب برداری کنیم، به دست می آید:

$$[a, b] = [b, c]$$

اکنون برعکس، فرض می کنیم: $[a, b] = [b, c]$ ، که از آن جا نتیجه می شود: $[a + c, b] = 0$ ؛ و بنا بر ویژگی III ضرب برداری، $a + c$ موازی بردار b است، یعنی عددی مانند λ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$a + c + \lambda b = 0 \iff a = -c - \lambda b$$

که اگر این مقدار a را در برابری $[b, c] = [c, a]$ قرار دهیم، به دست می آید:

$$[b, c] = \lambda [b, c] \iff (1 - \lambda)[b, c] = 0$$

بردارهای b و c هم راستا نیستند، یعنی $[b, c] \neq 0$ ؛ در نتیجه $\lambda = 1$ و سرانجام $a + b + c = 0$.

مثال ۱۰۰۴.۴. تجزیه بردارهای a و b در پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، به صورت

$$a = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3, \quad b = b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3$$

داده شده‌اند. بردار $[a, b]$ را در رابطه با بردارهای $f_1 = \{e_2, e_3\}$ و $f_2 = \{e_1, e_3\}$ تجزیه کنید.

حل. بنا بر ویژگی خطی ضرب برداری داریم:

$$[a, b] = [a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3, b] = a_x [e_1, b] + a_y [e_2, b] + a_z [e_3, b]$$

به همین ترتیب

$$[e_1, b] = [e_1, b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3] = b_x (e_1, e_1) + b_y [e_1, e_2] + b_z [e_1, e_3] = b_y f_2 - b_z f_1$$

$[e_1, e_2] = 0$ گرفته‌ایم). با روشی مشابه

$$[e_2, b] = b_z f_1 - b_x f_2, \quad [e_3, b] = b_x f_2 - b_y f_1$$

در نتیجه، به دست می‌آید:

$$[a, b] = a_x (b_y f_2 - b_z f_1) + a_y (b_z f_1 - b_x f_2) + a_z (b_x f_2 - b_y f_1) =$$

$$= f_1 \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (۴.۶)$$

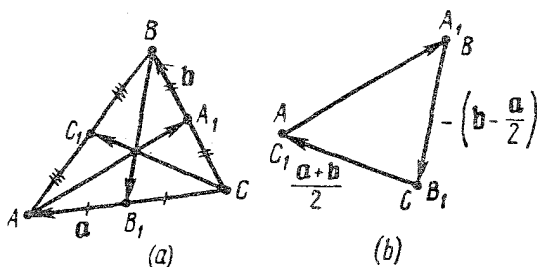
مثال ۱۱۰۴.۴. ثابت کنید، مساحت S از مثلثی که بردارهای ضلع‌های

آن، برابر با بردارهای میانه‌های مثلث ABC باشند (شکل ۳.۴)، برابر

است با $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث ABC .

حل. $a = \vec{CA}$ و $b = \vec{CB}$ می‌گیریم. بنا بر این

$$\vec{CC_1} = \frac{1}{3}(a+b), \quad \vec{B_1B} = b - \frac{1}{3}a,$$



شکل ۳.۴

$$[\vec{CC_1}, \vec{B_1B}] = \left[\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} \right] = \frac{3}{4}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

(مثال ۷.۲.۴ را ببینید). بنا براین

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{CC_1}, \vec{B_1B}]| = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \frac{3}{4} \sigma$$

مثال ۱۴.۲.۴. مثلث ABC مفروض است. روی خط‌های راست (AB) ،

(BC) و (CA) ، به ترتیب، نقطه‌های M ، N و P را انتخاب کرده‌ایم و می‌دانیم:

$$\vec{AM} = \alpha \vec{AB}, \quad \vec{BN} = \alpha \vec{BC}, \quad \vec{CP} = \alpha \vec{CA}$$

به ازای چه مقداری از α ، مساحت $S(\alpha)$ از مثلثی که، بردارهای ضلع‌های آن عبارتند از $\vec{CM}$ ، $\vec{AN}$ و $\vec{BP}$ ، حداقل مقدار ممکن است؟

حل. $\vec{a} = \vec{CA}$ و $\vec{b} = \vec{CB}$ می‌گیریم. با توجه به نتیجه مثال ۱۱.۳.۲،

می‌دانیم که بردارهای $\vec{CM}$ ، $\vec{AN}$ و $\vec{BP}$ وقتی يك مثلث می‌سازند که داشته باشیم:

$$\vec{CM} = (1 - \alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, \quad \vec{AN} = -\mathbf{a} + (1 - \alpha)\mathbf{b}$$

به این ترتیب

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} |[\vec{CM}, \vec{AN}]| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} |[(1-\alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, -\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{b}]| = \\
 &= \frac{1}{2} |-\alpha[\mathbf{b}, \mathbf{a}] + (1-\alpha)^2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \\
 &= \frac{1}{2} (1-\alpha+\alpha^2)|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = (1-\alpha+\alpha^2)S_{ABC}
 \end{aligned}$$

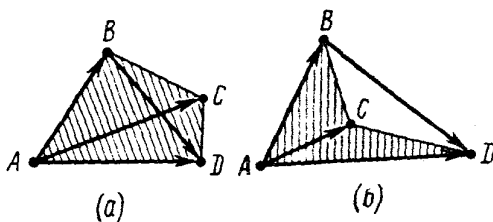
حداقل مقدار این عبارت، به ازای حداقل عبارت $\alpha^2 - \alpha + 1$ به دست می‌آید، یعنی به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ ؛ و این، وقتی پیش می‌آید که $\vec{AN}$ ، $\vec{CM}$ و $\vec{BP}$ ، میانه‌های مثلث ABC باشند (مثال ۱۱.۲.۴ را ببینید). این مقدار حداقل، برابر است با $\frac{3}{4} S_{ABC}$.

مثال ۱۳.۲.۴. دو مثلث ABC و ACD بر یک صفحه قرار دارند و می‌دانیم، نقطه‌های B و D در دو طرف ضلع (AC) قرار دارند (شکل ۴.۴). ثابت کنید S ، مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر است با

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{AC}, \vec{BD}]| \quad (4.7)$$

حل. بنا به فرض $\{\vec{AC}, \vec{AB}\} \sim \{\vec{AD}, \vec{AC}\}$. بنا بر این بردارهای

$$[\vec{AC}, \vec{AB}] \text{ و } [\vec{AD}, \vec{AC}]$$



شکل ۴.۴

در يك جهت اند و، در نتیجه، طول مجموع این بردارها، برابر است با مجموع طول‌های آن دو بردار:

$$\begin{aligned} |[\vec{AD}, \vec{AC}]| + |[\vec{AC}, \vec{AB}]| &= |[\vec{AD}, \vec{AC}] + [\vec{AC}, \vec{AB}]| = \\ &= |[\vec{AD}, \vec{AC}] - [\vec{AB}, \vec{AC}]| = |[\vec{AD} - \vec{AB}, \vec{AC}]| = \\ &= |[\vec{BD}, \vec{AC}]| \end{aligned}$$

و چون

$$|[\vec{AD}, \vec{AC}]| = 2S_{ADC}, \quad |[\vec{AC}, \vec{AB}]| = 2S_{ABC}, \quad S = S_{ADC} + S_{ABC}$$

به دست می آید:

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{BD}, \vec{AC}]| = \frac{1}{2} |[\vec{AC}, \vec{BD}]|$$

مثال ۱۴.۲.۴. مثلث ABC با مساحت S مفروض است. نقطه‌های M ، N و P را، به ترتیب، بر خط‌های راست (AB) ، (BC) و (CA) طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$\vec{AM} = \alpha \vec{AB}, \quad \vec{BN} = \beta \vec{BC},$$

$$\vec{CP} = \gamma \vec{CA}, \quad \alpha\beta\gamma \neq (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

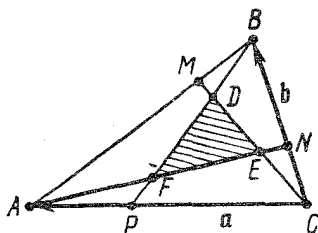
خط‌های راست (CM) ، (BP) و (AN) یکدیگر را در نقطه‌های

$$D = (CM) \cap (BP), \quad E = (CM) \cap (AN), \quad F = (BP) \cap (AN)$$

قطع کرده‌اند. مساحت σ مثلث DEF را پیدا کنید.

حل. چون $\alpha\beta\gamma \neq (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ ، بنا براین، نقطه‌های D ،

E و F متمایزند (شکل ۵.۴) (مثال ۹.۸.۲ را ببینید). اگر بردارهای $\vec{a} = \vec{CA}$ و $\vec{b} = \vec{CB}$ را به عنوان پایه در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



شکل ۵.۴

$$\begin{aligned}\vec{CM} &= \alpha \vec{b} + (1-\alpha) \vec{a}, \quad \vec{AN} = \\ &= -\vec{a} + (1-\beta) \vec{b}, \quad \vec{BP} = \\ &= \gamma \vec{a} - \vec{b}\end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\vec{CE} &= x \vec{CM}, \quad \vec{CD} = y \vec{CM}, \\ \vec{BD} &= z \vec{BP}, \quad \vec{BF} = v \vec{BP}, \\ \vec{AF} &= v \vec{AN}, \quad \vec{AE} = w \vec{AN}\end{aligned}$$

(عددهای w, v, u, z, y, x با تبدیل

دوری به دست می‌آیند؛ درواقع، می‌خواهیم از منحصر بودن تجزیه بردارها در رابطه با پایه $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ استفاده کنیم). از دور $AECA$ داریم:

$$\begin{aligned}\vec{AE} - \vec{CE} + \vec{CA} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w[-\vec{a} + (1-\beta)\vec{b}] - x(\alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{a}) + \vec{a} &= \\ = \vec{0} \cdot \vec{a} + \vec{0} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -w - x(1-\alpha) + 1 = 0, \\ w(1-\beta) - x\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w = \frac{\alpha}{1-\beta+\alpha\beta}, \quad x = \frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta}\end{aligned}$$

در این جا از فرض $1-\beta+\alpha\beta \neq 0$ استفاده کرده‌ایم. درواقع عددهای x و w وجود دارند: خط‌های راست (AN) و (CM) متقاطع اند و، درضمن، داریم:

$$w(1-\beta+\alpha\beta) = \alpha, \quad x(1-\beta+\alpha\beta) = 1-\beta$$

در این صورت، اگر $1-\beta+\alpha\beta = 0$ ، آن گاه باید داشته باشیم:

$$\alpha = 0, \quad 1-\beta = 0 \quad \text{و} \quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 0 = \alpha\beta\gamma$$

که فرض را نقض می‌کند. به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$y = \frac{\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma}, \quad z = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\gamma}, \quad u = \frac{\beta}{1-\gamma+\beta\gamma},$$

$$v = \frac{1-\gamma}{1-\gamma+\beta\gamma}$$

و برای مساحت σ داریم:

$$\sigma = \frac{1}{\gamma} |[\vec{ED}, \vec{EF}]| = \frac{1}{\gamma} |[(y-x)\vec{CM}, (v-w)\vec{AN}]| =$$

$$= \frac{1}{\gamma} |y-x| \cdot |v-w| \cdot |[\vec{CM}, \vec{AN}]| =$$

$$= \frac{1}{\gamma} |y-x| \cdot |v-w| \cdot |[\alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\mathbf{a}, -\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b}]| =$$

$$= \frac{1}{\gamma} |y-x| \cdot |v-w| \cdot |\alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + (1-\alpha)(1-\beta)[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| =$$

$$= |y-x| \cdot |v-w| \cdot |1-\beta+\alpha\beta| S$$

از طرف دیگر داریم:

$$y-x = \frac{\gamma(1-\beta+\alpha\beta) - (1-\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)} =$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)},$$

$$v-w = -\frac{\alpha\beta\gamma - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\gamma+\alpha\gamma)}$$

بنابراین، سرانجام به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{[\alpha\beta\gamma - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)]^2}{|(1-\beta+\alpha\beta)(1-\gamma+\alpha\gamma)|(1-\alpha+\alpha\gamma)} S$$

توجه داریم که، اگر $\alpha = \beta = \gamma = k \neq \frac{1}{\gamma}$ آن وقت

$$0 < \sigma = S_{DEF} = \frac{(2k-1)^2}{k^2-k+1} S = \frac{4\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} S < 4S_{ABC}$$

مثال ۱۵.۲.۴. نقطه‌های M, N, P, Q را، به ترتیب، روی ضلع‌های $[AB], [BC], [CD]$ و $[DA]$ از چهارضلعی محدب $ABCD$ به مساحت S (شکل ۶.۴) طوری انتخاب کرده ایم که داشته باشیم:

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|BN|}{|BC|} = \frac{|CP|}{|CD|} = \frac{|DQ|}{|DA|} = \alpha$$

مساحت $\sigma(\alpha)$ چهارضلعی $MNPQ$ را پیدا کنید. به ازای چه مقداری از α ، این مساحت به حداقل خود می‌رسد؟

حل. با توجه به دستور (۴.۷)، $\sigma(\alpha) = \frac{1}{2} |[\vec{MP}, \vec{NQ}]|$ ، که در آن

$$\begin{aligned} \vec{MP} &= \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DP} = -\alpha \vec{AB} + \vec{AD} - (1-\alpha) \vec{CD} = \\ &= -\alpha \vec{AB} + \alpha \vec{AD} + (1-\alpha) \vec{AD} - (1-\alpha) \vec{CD} = \\ &= \alpha \vec{BD} - (1-\alpha) \vec{AC}; \quad \vec{NQ} = (1-\alpha) \vec{BD} - \alpha \vec{AC}; \\ [\vec{MP}, \vec{NQ}] &= [\alpha \vec{BD} + (1-\alpha) \vec{AC}, (1-\alpha) \vec{BD} - \alpha \vec{AC}] = \\ &= (2\alpha^2 - 2\alpha + 1) [\vec{AC}, \vec{BD}] \end{aligned}$$

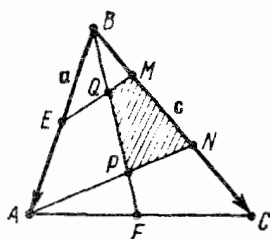
و بنابراین

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{2} (2\alpha^2 - 2\alpha + 1) |[\vec{AC}, \vec{BD}]| = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1) S$$

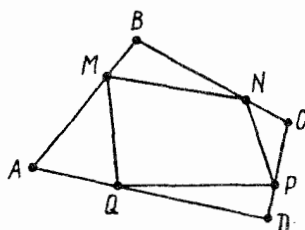
کمترین مقدار $\sigma(\alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $\frac{1}{2} S$.

مثال ۱۶.۲.۴. مساحت مثلث ABC برابر است با S . نقطه‌های E و

F را، به ترتیب، وسط ضلع‌های $[AB]$ و $[AC]$ و نقطه‌های $M \neq C$ و N



شکل ۷.۴



شکل ۶.۴

را روی ضلع $[BC]$ گرفته ایم و می دانیم $|MN| = |NC|$ (شکل ۷.۴).
خط های راست (EM) و (AN) ، میانه $[BF]$ را در نقطه های Q و P قطع کرده اند. ثابت کنید، مساحت σ چهارضلعی $MNPQ$ در نابرابری

$$\frac{1}{6}S \leq \sigma \leq \frac{1}{5}S$$

صدق می کند. در چه حالتی: $\sigma = \frac{1}{5}S$ ؛ $\sigma = \frac{1}{6}S$ ؟

حل. فرض می کنیم: $\vec{BA} = \mathbf{a}$ ، $\vec{BC} = \mathbf{c}$ ، $\vec{NC} = \frac{1}{2}\mathbf{xc}$ (بنابر فرض

$0 < x \leq 1$). بردارهای $\vec{BP}$ و $\vec{BF} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ هم جهت اند. بنابر این،

عدد λ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\vec{BP} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{c})$. به همین ترتیب، عدد α وجود دارد، به نحوی که برای آن، داشته باشیم:

$$\vec{AP} = \alpha \vec{AN} = \alpha \left[-\mathbf{a} + \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathbf{c} \right]$$

برای دور $ABPA$ داریم:

$$-\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \alpha \left[-\mathbf{a} + \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathbf{c} \right] = \mathbf{0}$$

یعنی $\alpha + \lambda = 1$ و $\lambda = \alpha \left(1 - \frac{x}{2}\right)$. از این جا به دست می آید:

$$\lambda = (2-x) : (4-x)$$

به این ترتیب، مساحت مثلث BPN چنین است:

$$\begin{aligned} S_{BPN} &= \frac{1}{2} |[\vec{BP}, \vec{BN}]| = \frac{1}{2} \left| \left[\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathbf{c} \right] \right| = \\ &= \frac{1}{2} \lambda \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot |[\mathbf{a}, \mathbf{c}]| = \frac{[(2-x)^2 S]}{[2(4-x)]} \end{aligned}$$

به همین ترتیب، روی دور $EBQE$ به دست می آید:

$$\vec{BQ} = \frac{1-x}{3-2x}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \quad S_{BQN} = \frac{(1-x)^2}{3-2x} S$$

بنابراین

$$\frac{S_{MNPQ}}{S} = \frac{S_{BPN} - S_{BQM}}{S} = \frac{(2-x)^2}{2(4-x)} - \frac{(1-x)^2}{3-2x} = f(x)$$

تابع $f(x)$ ، در بازه $[0, 1]$ ، پیوسته و مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{5(2-x)(2-3x)}{[2(4-x)^2(3-2x)^2]}$$

بنابراین، $f'(x) > 0$ در بازه $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ مثبت است، یعنی $f(x)$ در این بازه،

یکنوا و صعودی است. و چون $f'(x) < 0$ در بازه $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ منفی است، بنابراین

$f(x)$ ، در نقطه $x = \frac{2}{3}$ ماکزیمم دارد و $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}$. از آن جا که

$f(0) = f(1) = \frac{1}{6}$ ، بنابراین، کمترین مقدار $f(x)$ در بازه $[0, 1]$ ، در نقطه

$x = 1$ به دست می آید.

به این ترتیب، اگر داشته باشیم: $|BM| = |MN| = |NC|$ ، آن وقت

$\sigma = \frac{1}{5} S$ [در این حالت (EM) با (AN) موازی است]؛ و اگر داشته

باشیم: $M = B$ ، آن وقت $\sigma = \frac{1}{6} S$.

مثال ۱۷.۲.۴. ثابت کنید، مساحت دوزنقه $ABCD$ که در آن، (AD)

با (BC) موازی است، برابر است با $\frac{1+k}{2} |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$ به شرطی که

$$k = \frac{|BC|}{|AD|}$$

حل. $\vec{a} = \vec{AD}$ ، $\vec{b} = \vec{AB}$ می گیریم. در نتیجه

$$\vec{BC} = k\vec{AD} = k\vec{a}, \quad \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{b} + k\vec{a},$$

$$\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} |[\vec{AC}, \vec{BD}]| = \frac{1}{2} |[\vec{b} + k\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}]| =$$

$$= \frac{1}{2} |[\vec{b}, \vec{a}] - k[\vec{a}, \vec{b}]| = \frac{k+1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]|$$

مثال ۱۸.۲.۴. مساحت دوزنقه $ABCD$ برابر S و نسبت طول های

دو قاعده آن، برابر $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{1}{k} = 3$ است. نقطه K بر امتداد قاعده

$[AD]$ از طرف D قرار دارد و پاره خط راست $[EF]$ طوری است که

$$(AE) \parallel (DF), (BE) \parallel (CF), \frac{|AE|}{|DF|} = m = 2, \frac{|CF|}{|BE|} = n = 2$$

(شکل ۸.۴). مطلوب است محاسبه مساحت مثلث EFB .

حل. فرض می کنیم: $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $DK = xa$ ($x > 0$).

$\vec{DF} = \vec{y}$ و $\vec{BE} = \vec{z}$. بنا براین $AE = \lambda y$, $|\lambda| = m$, $CF = \mu z$, $|\mu| = n$. در دور $ABEA$ داریم:

$$\vec{b} + \vec{z} - \lambda \vec{y} = \vec{0}$$

و در دور $ABCFDA$:

$$\vec{b} + (k-1)\vec{a} + \mu \vec{z} - \vec{y} = \vec{0}$$

و از دستگاه شامل این دو معادله، به دست می آید:

$$\lambda = t, \quad 1+x=tx, \quad \lambda = \frac{(1+x)}{x} > 0$$

و در نتیجه $\lambda = m$. پس دو حالت ممکن است: $\mu = n$ که در این صورت

$$\sigma = \frac{|1-n|}{|1-mn|} \frac{S}{k+1} = \frac{1}{4} S$$

(۲) $\mu = -n$ که در این صورت

$$\sigma = \frac{1+n}{1+mn} \frac{S}{k+1} = \frac{9}{20} S$$

مثال ۱۹.۲.۴. ثابت کنید، وجه‌های چهاروجهی $ABCD$ وقتی، و تنها وقتی هم‌ارزند که از مثلث‌های برابر تشکیل شده باشند.

حل. از شکل ۱۴.۳ و نمادهای مسئله ۱۸.۲.۳ استفاده می‌کنیم؛ بنا بر این

$$\begin{aligned} \vec{BC} &= 2\mathbf{c}, \quad \vec{AD} = 2\mathbf{a}, \quad \vec{BD} = \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \vec{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \\ \vec{AC} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \end{aligned}$$

از آنجا

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} |\vec{BC}, \vec{BD}| = |[\mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{a}]| = |[\mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]|,$$

$$S_{BAD} = \frac{1}{2} |\vec{AD}, \vec{AB}| = |[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}]| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{c}]|,$$

$$S_{BAC} = \frac{1}{2} |\vec{BC}, \vec{AB}| = |[\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}]| = |[\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}]|,$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} |\vec{AD}, \vec{AC}| = |[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}]| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}]|$$

با توجه به اتحاد $|\mathbf{m}, \mathbf{n}|^2 = \mathbf{m}^2 \mathbf{n}^2 - (\mathbf{m}, \mathbf{n})^2$ ، هم‌ارزی وجه‌های چهاروجهی $ABCD$ ، منجر به دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$\mathbf{c}^2 [\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})] - [(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c})]^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= c^2[a^2 + b^2 + 2(a, b)] - [(a, c) + (b, c)]^2, \\
 &a^2[b^2 + c^2 - 2(b, c)] - [(a, b) - (a, c)]^2 = \\
 &= a^2[b^2 + c^2 + 2(b, c)] - [(a, b) + (a, c)]^2, \\
 &c^2[a^2 + b^2 + 2(a, b)] - [(a, c) + (b, c)]^2 = \\
 &= a^2[b^2 + c^2 + 2(b, c)] - [(a, b) + (a, c)]^2 \quad (۴.۸)
 \end{aligned}$$

از دو معادله اول به دست می آید:

$$c^2(a, b) = (a, c)(b, c), \quad a^2(b, c) = (a, c)(a, b)$$

و از ضرب این دو رابطه، خواهیم داشت:

$$a^2c^2 - (a, c)^2(a, b)(b, c) = 0$$

چون a و c هم راستا نیستند، پس $|(a, c)| > |a| \cdot |c|$. بنابراین

$$(a, b)(b, c) = 0$$

بنابراین $a^2(b, c)^2 = (a, c)(a, b)(b, c) = 0$ یعنی $(b, c) = 0$. و چون

$$(a, b) = 0 \quad \text{پس} \quad c^2(a, b) = (a, c)(b, c) = 0$$

این ضرب های اسکالر را در (۴.۸) قرار می دهیم، به دست می آید:

$$b^2(a^2 - c^2) = 0; \quad |a| = |c|; \quad |AD| = |BC|$$

بردار $b = \vec{EF}$ بر هر بردار $\vec{AD} = 2a$ و $\vec{BC} = 2c$ عمود است. همچنین با استفاده از نتیجه مثال ۱۸.۲.۳، داریم:

$$|AB| = |CD| \quad \text{و} \quad |BD| = |AC|$$

بنابراین، طول یال های متناظر چهار وجهی $ABCD$ ، دوه دو با هم برابرند. و این، به معنای آن است که، وجه های چهار وجهی، مثلث هایی برابرند.

بخش ۳.۴. حاصل ضرب سه گانه برداری.

معادله برداری خط راست در فضا.

بردار نرمال صفحه

مثال ۱۰۳.۴. (دستور حاصل ضرب سه گانه برداری). ثابت کنید، برای

هر سه بردار دلخواه $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در فضا، داریم:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (۴.۹)$$

حل. پایه راست گرد قائم و یکجه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ را در فضا طوری انتخاب

می کنیم که، پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ در صفحه ای موازی بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ و بردار $\mathbf{i}$ هم راستا با بردار $\mathbf{b}$ باشد و داشته باشیم: $\mathbf{k} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}]$. در این پایه

$$\mathbf{b} = b\mathbf{i} = (b, 0, 0), \mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} = (c_x, c_y, 0),$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & 0 & 0 \\ c_x & c_y & 0 \end{vmatrix} = bc_y\mathbf{k} = (0, 0, bc_y),$$

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & bc_y \end{vmatrix} = a_y bc_y \mathbf{i} - a_x bc_y \mathbf{j}$$

اگر درست است برابری بالا، بردار $a_x bc_x \mathbf{i}$ را یکبار کم و یکبار اضافه کنیم، به دست می آید:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = b\mathbf{i}(a_x c_x + a_y c_y + a_z \cdot 0) - (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j})(a_x b + a_y \cdot 0 + a_z \cdot 0) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

مثال ۲۰۳.۴. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای برقراری برابری

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] \quad (۴.۱۰)$$

حل. طبق دستور (۴.۹) داریم:

$$[[a, b], c] = -[c, [a, b]] = b(a, c) - a(b, c),$$

$$[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$$

به این ترتیب، برابری (۴.۱۰) تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$0 = a(b, c) - c(a, b).$$

ولی، بنا به دستور (۴.۹):

$$a(b, c) - c(a, b) = [b, [a, c]]$$

بنابراین، برابری (۴.۱۰)، وقتی و تنها وقتی برقرار است که

$$[b, [a, c]] = 0$$

یعنی وقتی که بردارهای b و $[a, c]$ هم راستا باشند؛ و این، وقتی ممکن است که $a \parallel c$ یا $a \perp c$ و بردار b بر یکی از دو بردار a و c عمود باشد.

مثال ۳.۳.۴. (معادله برداری خط راست در فضا). قطب ثابت O را

در نظر می گیریم و بردارهای $a \neq 0$ و M را طوری انتخاب می کنیم که داشته باشیم: $(M, a) = 0$. ثابت کنید، مجموعه l ، از همه نقطه های فضا که شعاع حامل آنها، r در معادله

$$[r, a] = M \quad (4.11)$$

صدق می کنند، یک خط راست است. موقعیت این خط راست را در فضا معین کنید.

حل. (۱) حل اول. دستگاه مختصات $\{O, i, j, k\}$ را در نظر می گیریم،

به نحوی که $k = \frac{a}{a}$ و $k \neq 0$ و $a = |a|$ ، یعنی $a = (0, 0, a)$. چون $(M, a) = 0$ ،

دستگاه مختصات را می توان طوری انتخاب کرد که بردار M با بردار j هم راستا باشد، یعنی $M = mj = (0, m, 0)$.

$A(x, y, z)$ را نقطه ای از l می گیریم. بنا بر معادله (۴.۱۱) داریم:

$$[r, a] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = ayi - axj = M = mj$$

به این ترتیب، نقطه $A(x, y, z)$ ، وقتی و تنها وقتی به l تعلق دارد که مختصات آن، در دستگاه معادله‌های زیر صدق کنند:

$$y = 0, \quad x = -\frac{m}{a} \quad (۴.۱۲)$$

معادله اول این دستگاه، معادله صفحه xz است و معادله دوم، صفحه‌ای را موازی با صفحه yz مشخص می‌کند. بنابراین، l عبارت است از مجموعه نقطه‌های مشترک این دو صفحه، یعنی خط راستی موازی با محور z (برای

بردار $\mathbf{a}$). این خط راست، از نقطه با شعاع حامل $\mathbf{r}_0 = \left(-\frac{m}{a}, 0, 0\right)$ می‌گذرد. $\mathbf{r}_0$ را می‌توان بر حسب $\mathbf{a}$ و $\mathbf{M}$ محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= -\frac{m}{a} \mathbf{i} = -\frac{m}{a} [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \left[\mathbf{k}, \frac{m}{a} \mathbf{j} \right] = \\ &= \left[\mathbf{k}, \frac{\mathbf{M}}{a} \right] = \left[\frac{\mathbf{a}}{a}, \frac{\mathbf{M}}{a} \right] = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{a^2} \end{aligned}$$

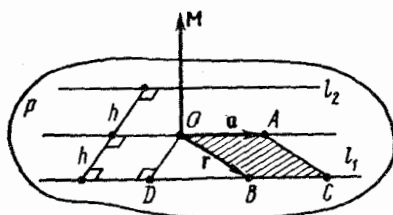
معادله پارامتری خط راست l ، چنین است:

$$\mathbf{r} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2} + at, \quad t \in \mathbb{R} \quad (۴.۱۳)$$

داده حل دوم (هندسی). اگر $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ، آن وقت، l مجموعه‌ای از نقطه‌های فضا است که $\mathbf{r}$ ، شعاع حامل آن‌ها، با بردار $\mathbf{a}$ هم‌راستا می‌شود (زیرا $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$)؛ یعنی l ، خط راستی است (با بردار هادی $\mathbf{a}$) که از قطب O می‌گذرد.

اکنون فرض می‌کنیم: $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$. صفحه P را در نظر می‌گیریم که از نقطه O بگذرد و بر بردار $\mathbf{M}$ عمود باشد. بردار $OA = \mathbf{a}$ را از نقطه O رسم می‌کنیم. چون $(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0$ ، بنابراین نقطه A ، به صفحه P تعلق دارد و، در نتیجه، (OA) متعلق به P است. $B(\mathbf{r})$ را نقطه‌ای از l می‌گیریم. بنابراین ویژگی I از حاصل ضرب برداری و با توجه به دستور (۴.۱۱) خواهیم داشت:

$(\mathbf{r}, \mathbf{M}) = 0$ ، یعنی $B \in P$. بنابراین l ، زیرمجموعه‌ای از صفحه P است. به جز آن $|\mathbf{M}| = |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|$ ؛ یعنی مساحت متوازی‌الاضلاع $BOAC$ ، که روی دو بردار $\mathbf{r}$ و $\mathbf{a}$ ساخته شده است، برابر با $|\mathbf{M}|$ (بنابر ویژگی II حاصل ضرب برداری) و ارتفاعی از این متوازی‌الاضلاع که از رأس B بر خط راست (OA) عمود شده است، برابر با $|h| = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{a}|}$ می‌شود؛ که برای همه نقطه‌های $B \in l$ مشترك است. به این ترتیب، l زیرمجموعه‌ای است از صفحه P که، همه نقطه‌های آن، به فاصله‌ای یکسان و برابر h از خط راست (OA) . این مجموعه، دو خط راست l_1 و l_2 را تشکیل می‌دهند که با (OA) موازی‌اند (شکل ۹.۴).



شکل ۹.۴

برای یکی از این دو خط راست (خط راست l_1 در شکل ۹.۴)، $\mathbf{r}$ شعاع حامل نقطه‌های واقع بر آن، با دو بردار $\mathbf{M}$ و $\mathbf{a}$ ، پایه‌ای راست گردد و، برای خط راست دیگر (l_2)، پایه‌ای چپ گرد تشکیل می‌دهند. بنا بر ویژگی IV از حاصل ضرب برداری، خط راست l_2 متعلق به مجموعه l ، که با معادله (۴.۱۱) مشخص شده است، نیست، درحالی که l_1 به مجموعه l تعلق دارد (همه نقطه‌های l_1 ، با توجه به شرط‌های I، II و IV، معرف معادله (۴.۱۱) هستند). به این ترتیب، l خط راستی است با بردار هادی $\mathbf{a}$ که از نقطه D

(پای عمود وارد از O بر l_1) می‌گذرد. شعاع حامل $\mathbf{r}_0 = OD$ ، به سادگی به دست می‌آید: چون $\vec{OD} \perp \mathbf{M}$ ، $\vec{OD} \perp \vec{OA}$ و پایه $\{\vec{OD}, \vec{OA}, \mathbf{M}\}$ راست‌گردد است، بنا براین $OD \uparrow \uparrow [\mathbf{a}, \mathbf{M}]$ ، یعنی $\mathbf{r}_0 = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{M}]$ که، در آن $\lambda > 0$ برای پیدا کردن λ ، فرض می‌کنیم:

$$|\mathbf{r}_0| = |\vec{OD}| = h = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{a}|}$$

که در آن

$$\frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{a}|} = |\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{M}]| = \lambda|[\mathbf{a}, \mathbf{M}]| = \lambda|\mathbf{a}||\mathbf{M}|$$

برهم عمودند). در نتیجه $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}$ ، یعنی

$$\mathbf{r}_0 = [\mathbf{a}, \mathbf{M}] : |\mathbf{a}|^2$$

داخل سوم. $\mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2}$ می‌گیریم. بنا بر دستور حاصل ضرب

سه گانه برداری

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = -\frac{1}{|\mathbf{a}|^2} [\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{M}]] =$$

$$= -\frac{1}{|\mathbf{a}|^2} [\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{M}) - \mathbf{M}(\mathbf{a}, \mathbf{a})] = \mathbf{M}$$

[چون $(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0$]. از این رو، شعاع حامل نقطه‌ای مثل $D \in l$ است و معادله (۴.۱۱)، با توجه به برابری $\mathbf{M} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$ ، هم‌ارز است با معادله

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0 \quad (4.14)$$

بنابه ویژگی III حاصل ضرب برداری، برابری (۴.۱۴)، تنها وقتی برقرار است که $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ موازی $\mathbf{a}$ باشد، یعنی بتوان عدد $t \in \mathbb{R}$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t$ ، یعنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

به این ترتیب، معادله (۴.۱۱) با معادله پارامتر - برداری (۴.۱۵) هم‌ارز است و، در نتیجه، مجموعه l ، عبارت است از خط راستی با معادله پارامتری (۴.۱۵).

مثال ۴.۳.۴. معادله برداری، از نوع (۴.۱۱)، خط راست l را بنویسید:

$$l: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$$

حل. خط راست l ، از نقطه‌ای با شعاع حامل $\mathbf{r}_0 = (-1, 3, 0)$ می‌گذرد و بردار هادی آن $\mathbf{a} = (-3, 4, 3)$ است. چون

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

معادله برداری خط راست l ، به این صورت درمی‌آید:

$$[\mathbf{r}, -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}] = 9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

مثال ۵.۳.۴. شعاع حامل $\mathbf{x}$ ، نقطه برخورد خط راست

$$l: [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}, \quad |\mathbf{a}| \neq 0, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0$$

و صفحه به معادله زیر را پیدا کنید:

$$P: (\mathbf{r}, \mathbf{N}) = D, \quad \mathbf{N} \neq 0, \quad (\mathbf{N}, \mathbf{a}) \neq 0$$

حل. معادله خط راست l را، به صورت پارامتری (۴.۱۳) می‌نویسیم.

مسئله به این‌جا برمی‌گردد که، عدد t را طوری پیدا کنیم که بردار

$$\mathbf{x} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2} + \mathbf{a}t$$

در برابری $(\mathbf{x}, \mathbf{N}) = D$ هم صدق کند. یعنی

$$t(\mathbf{a}, \mathbf{N}) + \frac{([\mathbf{a}, \mathbf{M}], \mathbf{N})}{|\mathbf{a}|^2} = D$$

بنابرین

$$t = \frac{D|\mathbf{a}|^2 - ([\mathbf{a}, \mathbf{M}], \mathbf{N})}{|\mathbf{a}|^2(\mathbf{a}, \mathbf{N})},$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} \left([\mathbf{a}, \mathbf{M}] + \frac{D|\mathbf{a}|^2 - ([\mathbf{a}, \mathbf{M}], \mathbf{N})}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})} \mathbf{a} \right)$$

مثال ۶.۳.۴. مطلوب است معادلهٔ نرمال صفحهٔ P ، به شرطی که معادلهٔ

پارامتری صفحهٔ P ، چنین باشد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

حل. بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مستقل خطی و موازی با صفحهٔ P هستند.

بنابراین، به عنوان بردار نرمال، می‌توان فرض کرد:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad (۴.۱۶)$$

بردار $\mathbf{r}_0$ شعاع حامل نقطه‌ای از صفحهٔ P است. با توجه به دستور (۳.۲۸)، معادلهٔ نرمال صفحه، چنین است:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0$$

مثال ۷.۳.۴. در چهار وجهی $ABCD$ ، صفحهٔ نیمساز فرجهٔ مربوط

به یال $[CD]$ ، یال $[AB]$ را در نقطهٔ F قطع می‌کند (شکل ۱۰.۴). ثابت کنید:

$$[AF] : [FB] = S_{ACD} : S_{BCD}$$

حل. فرض می‌کنیم: $\vec{\mathbf{a}} = \vec{DA}$ ، $\vec{\mathbf{b}} = \vec{DB}$ ، $\vec{\mathbf{c}} = \vec{DC}$ ، $\mathbf{c}' = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$

در نتیجه $\mathbf{a}' = [\mathbf{c}, \mathbf{b}]$ ، $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}'}, \widehat{\mathbf{b}'})$ و $|AF| = \mu |AB|$.

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} |\mathbf{b}'|, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2} |\mathbf{a}'|$$

بناباه دستور (۴.۱۶)، بردارهای $\mathbf{N}_1 = \mathbf{a}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_r &= [\mathbf{c}, \vec{DF}] = [\mathbf{c}, \vec{DA} + \mu \vec{AB}] = \\ &= [\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})] = \mu \mathbf{a}' + (1 - \mu) \mathbf{b}' \end{aligned}$$

و $\mathbf{N}_r = \mathbf{b}'$ ، به ترتیب، بردارهای نرمال صفحه‌های (BCD) ، (FCD) هستند. از آن جا که (FCD) ، صفحه نیمساز است،
 $(\widehat{\mathbf{N}_r}, \widehat{\mathbf{N}_l}) = (\widehat{\mathbf{N}_r}, \widehat{\mathbf{N}_r})$ ، بنابراین

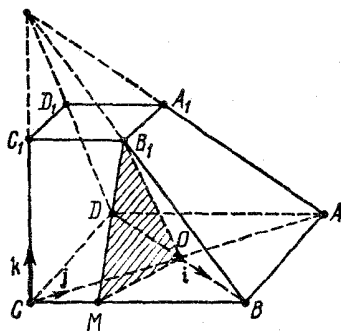
$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{N}_l, \mathbf{N}_r)}{|\mathbf{N}_l| |\mathbf{N}_r|} &= \frac{(\mathbf{N}_r, \mathbf{N}_r)}{|\mathbf{N}_r| |\mathbf{N}_r|}, \\ \frac{\mu \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}' + (1 - \mu)(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}')}{|\mathbf{a}'|} &= \frac{(1 - \mu) \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}' + \mu(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}')}{|\mathbf{b}'|} \quad \text{یعنی} \end{aligned}$$

و یا

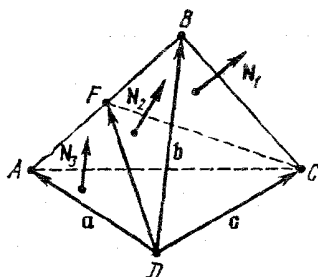
$$(1 - \cos \varphi)[(1 - \mu)|\mathbf{b}'| - \mu|\mathbf{a}'|] = 0$$

چون $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ ، بنابراین

$$S_{ACD} : S_{BCD} = |\mathbf{b}'| : |\mathbf{a}'| = \frac{\mu}{1 - \mu} = |AF| : |FB|$$



شکل ۱۱.۴



شکل ۱۰.۴

مثال ۰۸۰۳۰۴. $[AA_1]$ ، $[BB_1]$ ، $[CC_1]$ و $[DD_1]$ یال‌های جانبی هرم ناقص $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ را تشکیل می‌دهند. قاعده پایین هرم ناقص، لوزی $ABCD$ است. یال $[CC_1]$ ، بر صفحه $(ABCD)$ عمود است و داریم:

$$|CC_1| = |A_1 B_1| = 2, \quad |AB| = 4, \quad \widehat{BAD} = 60^\circ$$

در ضمن، نقطه M را روی یال $[BC]$ طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $|BM| = 3$. صفحه‌ای بر سه نقطه A_1 ، B_1 و M و O (مرکز لوزی $ABCD$) می‌گذرانیم. زاویه بین این صفحه و صفحه وجه $AA_1 C_1 C$ را پیدا کنید. حل. پایه متعامد، یک‌ه و راست گرد

$$\mathbf{i} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}, \quad \mathbf{j} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}, \quad \mathbf{k} = \frac{\vec{CC_1}}{|\vec{CC_1}|}$$

را انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۱۰۴). در این پایه داریم:

$$\vec{OB} = (2, 0, 0), \quad \vec{CO} = (0, 2\sqrt{3}, 0), \quad \vec{CC_1} = (0, 0, 2),$$

$$\vec{CB} = (2, 2\sqrt{3}, 0), \quad \vec{CM} = \frac{1}{4}\vec{CB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \vec{C_1 B_1} =$$

$$= \frac{1}{4}\vec{CB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \vec{MO} = \vec{CO} - \vec{CM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$\vec{MB_1} = -\vec{CM} + \vec{CC_1} + \vec{C_1 B_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$$

بنابر دستور (۴۰۱۶)، بردار نرمال N_1 از صفحه $(B_1 MO)$ چنین است:

$$N_1 = [\vec{MO}, \vec{MB_1}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{vmatrix} = (3\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3})$$

بردار نرمال N_1 از صفحه (AA_1C_1C) موازی با j و k است و، به روشنی، برابر i است. بنابراین، برای زاویه φ ، بین صفحه‌های (B_1MO) و (AA_1C_1C) داریم:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= |(N_1, N_2)| : (|N_1| |N_2|) = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}, \\ \varphi &= \arccos 3\sqrt{\frac{3}{31}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

مثال ۹.۳.۴. بردار هادی خط راست l ، فصل مشترك دو صفحه P_1 و P_2 را پیدا کنید، به شرطی که:

$$P_1 : (r, N_1) = D_1, \quad P_2 : (r, N_2) = D_2$$

حل. بردار هادی a (بردار هادی خط راست l) موازی صفحه P_1 و عمود بر بردار نرمال N_1 است. a بر N_2 هم عمود است. بنابراین، می‌توانیم بردار $[N_1, N_2]$ را به عنوان a در نظر بگیریم.

مثال ۱۰.۳.۴. مطلوب است محاسبه زاویه بین خط راست l و صفحه P ، به شرطی که:

$$l : \begin{cases} 3x + 5y + 4z - 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad P : x + z + 2 = 0$$

حل. بردار هادی خط راست l از دستور

$$a = [N_1, N_2] \quad (2.17)$$

به دست می‌آید که در آن: $N_1 = (3, 5, 4)$ و $N_2 = (1, 1, 0)$ (مسأله ۹.۳.۴ را ببینید). زاویه φ بین خط راست l و صفحه P ، با توجه به دستور (۳.۵۳) به دست می‌آید:

$$\varphi = \arcsin \frac{|(N, a)|}{|N| |a|}$$

که در آن

$$N = (1, 0, 1), \quad a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 4, -2)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ \text{ یعنی}$$

مثال ۱۱.۳.۴. زاویه بین این دو خط راست را پیدا کنید:

$$l: \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}; \quad L: \begin{cases} x-y+3z+2=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$$

حل. بردارهای هادی a و b ، به ترتیب، برای خط‌های راست l و L ، چنین اند (دستور (۴.۱۷) را ببینید):

$$a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 2, -1), \quad b = (5, 5, 0)$$

از آن جا

$$\cos \varphi = \frac{|(a, b)|}{|a||b|} = 0, \quad \varphi = 90^\circ$$

بخش ۴.۴. حاصل ضرب سه گانه اسکالر.

معیار هم صفحه بودن بردارها.

حجم چهاروجهی

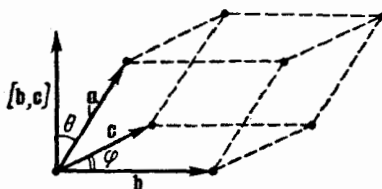
عدد $(a, [b, c])$ را، به عنوان حاصل ضرب سه گانه اسکالر از بردارهای

a و b و c (یک سه تایی مرتب) تعریف می کنیم و آن را، به صورت (a, b, c)

می نویسیم.

ویژگی‌های حاصل ضرب سه گانه اسکالر (یا عددی) بردارها.

۱° حاصل ضرب سه گانه اسکالر بردارها، وقتی و تنها وقتی برابر صفر است که، سه بردار، هم صفحه باشند.



شکل ۱۲.۴

$\square$ φ را زاویه بین بردارهای b و c ، و θ را زاویه بین بردارهای a و $[b, c]$ می‌گیریم (شکل ۱۲.۴). در این صورت

$$(a, [b, c]) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } a = 0 \text{ یا } [b, c] = 0 \\ |a| |[b, c]| \cos \theta = |a| |b| |c| \sin \varphi \cos \theta & \text{(۴.۱۸)} \\ 0, & \text{اگر } a \neq 0 \text{ و } [b, c] \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین، برای $(a, [b, c]) = 0$ ، تنها در حالت‌های زیر ممکن است:
 $a = 0$ (در این حالت، بردارهای a, b و c ، به روشنی، روی یک صفحه‌اند (سه بردار هم صفحه)؛

$[b, c] = 0$ (در این حالت، بردارهای b و c هم راستا می‌شوند و، بنابراین، سه بردار a, b و c هم صفحه‌اند؛

$a \neq 0$ و $[b, c] \neq 0$ (یعنی $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ و $\sin \varphi \neq 0$)،
 $\cos \theta = 0$ (دستور (۴.۱۸) را ببینید). در این حالت، بردار a بر بردار $[b, c]$ عمود است، یعنی a موازی صفحه‌ای است که b و c تشکیل یک پایه را در آن می‌دهند.

از طرف دیگر، اگر $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$ ، آن وقت بنا بر دستور (۴.۱۸)، $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ بردارهایی غیر صفرند، زیرا $\sin \theta \neq 0$ ، یعنی $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم راستا نیستند؛ همچنین $\cos \theta \neq 0$ ، یعنی بردارهای $\mathbf{a}$ و $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ عمود بر هم نیستند؛ بنابراین $\mathbf{a}$ ، با صفحه‌ای که بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در آن تشکیل يك پایه می‌دهند، موازی نیست و، به زبان دیگر، $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه نیستند. ■

۲°. اگر در پایه متعامد، يکه و داست گرد $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ فرض کنیم:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

آن وقت داریم:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (۴.۱۹)$$

□ بردار $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ، بنا به دستور (۴.۱) برابر است با

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

توجه کنیم که از دستور (۴.۱۹) و معیار هم صفحه بودن بردارها (مثال ۲۰.۵.۲ را ببینید)، می‌توان به سادگی و یژگی ۱° را به دست آورد. همچنین، از دستور (۴.۱۹)، و یژگی زیر هم نتیجه می‌شود.

۳°. پایه $\{a, b, c\}$ ، تنها با شرط $\langle a, b, c \rangle > 0$ ، راست‌گرد است.
 $\square$ بنا به دستور (۴.۱۹):

$$\langle a, b, c \rangle = \det S^T = \det S$$

که در آن، S عبارت است از ماتریس انتقال از پایه راست‌گرد $\{i, j, k\}$ به پایه $\{a, b, c\}$.
 ۴°. همیشه داریم:

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle &= \langle b, c, a \rangle = \langle c, a, b \rangle = -\langle a, c, b \rangle = \\ &= -\langle c, b, a \rangle = -\langle b, a, c \rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

در حالت خاص، وقتی که دست‌کم با دو عامل برابر سروکار داشته باشیم، حاصل ضرب سه‌گانه اسکالر، برابر صفر است.

$\square$ برای‌های (۴.۲۰) را می‌توان از دستور (۴.۱۹) و ویژگی ۲° دترمینان‌ها (بخش ۴.۲ را ببینید) نتیجه گرفت.

برابری $\langle a, a, c \rangle = 0$ (و سایر ضرب‌های سه‌گانه اسکالری که دو عامل برابر دارند)، از برای‌های (۴.۲۰) به دست می‌آید: برای $b = a$

داریم: $\langle a, a, c \rangle = 0$ یا $\langle a, a, c \rangle = -\langle a, a, c \rangle$ $\blacksquare$

$$5°. \text{اگر بدانیم: } a = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3$$

$$b = b_x e_1 + b_y e_2 + b_z e_3, \quad c = c_x e_1 + c_y e_2 + c_z e_3$$

آن وقت

$$\langle a, b, c \rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} (e_1, e_2, e_3) \quad (4.21)$$

$\square$ با توجه به دستور (۴.۶) داریم:

$$[b, c] = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} f_1 - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} f_2 + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} f_3$$

که در آن $f_1 = [e_1, e_2]$ ، $f_2 = [e_2, e_3]$ ، $f_3 = [e_3, e_1]$ چون $(e_1, f_1) = (e_2, f_2) = (e_3, f_3) = 0$ ، $(e_1, f_2) = (e_2, f_3) = (e_3, f_1) = 1$ بر هر دو بردار e_1 و e_2 عمود است،

$$(a, f_1) = (a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3, f_1) = a_x (e_1, e_2, e_3)$$

و به همین ترتیب:

$$(a, f_2) = a_y (e_1, e_2, e_3), \quad (a, f_3) = a_z (e_1, e_2, e_3)$$

بنابراین

$$(a, [b, c]) = (e_1, e_2, e_3) \left(a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right) = (e_1, e_2, e_3) \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \blacksquare$$

۶. اگر بردارهای a ، b و c هم‌صفحه نباشند، حجم متوازی‌السطوحی که روی این سه بردار ساخته شود، برابر است با قدرمطلق حاصل ضرب سه گانه اسکالر این بردارها.

□ با توجه به دستور (۴.۱۸) داریم:

$$|(a, b, c)| = |a| \cdot |b| \cdot |c| \times |\sin \varphi| |\cos \theta|$$

از طرف دیگر، حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای a ، b و c ساخته شده باشد، برابر است با حاصل ضرب S ، مساحت قاعده، در h ، ارتفاع آن، و

$$S = |b| \cdot |c| \sin \varphi, \quad h = |a| \cos \theta$$

به این ترتیب، اگر a ، b و c هم‌صفحه نباشند، حجم متوازی‌السطوحی که روی آن‌ها ساخته می‌شود (شکل ۱۲.۴)، برابر است با $|(a, b, c)|$. ■

۷. حاصل ضرب اسکالر سه بردار، در رابطه با هر یک از بردارها، خطی است:

$$(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{d}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) \quad (۴.۲۲)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{d}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$$

برای بردادهای دلخواه $\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$ و عددهای دلخواه λ و μ .
 $\square$ برای‌های (۴.۲۲) را می‌توان، به سادگی، از ویژگی خطی

حاصل ضرب‌های اسکالر و برداری دو بردار نتیجه گرفت. ■

مثال ۳.۴.۱۰. حجم V متوازی‌السطوح $ABCD'A'B'C'D'$ را پیدا

کنید، به شرطی که بدانیم:

$$A(۱, ۲, ۳), B(۹, ۶, ۴), D(۳, ۵, ۴), A'(۵, ۲, ۶)$$

حل. داریم:

$$V = |(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'})| = \begin{vmatrix} ۸ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۳ \end{vmatrix} = ۴۸$$

مثال ۳.۴.۲۰. با همان شرط‌های مسأله قبل، طول ارتفاع h ، وارد از

رأس A' بر قاعده $ABCD$ را پیدا کنید.

حل. مساحت قاعده $ABCD$ ، چنین است: $S = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

$$|\vec{AB}, \vec{AD}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۸ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۱ \end{vmatrix} = (۶, -۶, -۲۴)$$

بنابراین

$$S = ۶\sqrt{۱^2 + (-۱)^2 + (-۴)^2} = ۶\sqrt{۱۸} = ۱۸\sqrt{۲}$$

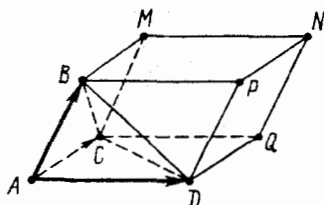
$$h = \frac{V}{S} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

و از آن‌جا

مثال ۳.۴.۳۰. ثابت کنید، حجم هر چهاروجهی برابر است با $\frac{1}{6}$

قدر مطلق حاصل ضرب اسکالر هر سه بردار ناهم صفحه‌ای که یال‌های چهاروجهی را تشکیل می‌دهند.

حل. متوازی السطوح $ACQDBMNP$ دارای چهاروجهی $ABCD$ می‌سازیم (شکل ۱۳.۴). داریم:



$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} h \cdot S_{ACD}$$

شکل ۱۳.۴

که در آن، h ، طول ارتفاع وارد از

رأس B بر صفحه (ACD) است و، در ضمن، مساحت مثلث ACD برابر با نصف مساحت متوازی الاضلاع $ACQD$ است. بنابراین

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} h S_{ACQD} = \frac{1}{6} V_{ACQDBMNP} = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$

علاوه بر آن

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{DB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{CB}, \vec{AC}, \vec{AD})$$

در واقع

$$\begin{aligned} (\vec{DB}, \vec{AC}, \vec{AD}) &= (\vec{AB} - \vec{AD}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \\ &= (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) - (\vec{AD}, \vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \end{aligned}$$

(بردارهای $\vec{AD}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$ هم صفحه‌اند و، بنابراین، حاصل ضرب اسکالر آن‌ها، برابر صفر است). به همین ترتیب:

$$\begin{aligned} (\vec{CB}, \vec{AC}, \vec{AD}) &= (\vec{AB} - \vec{AC}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \\ &= (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) - (\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AC}) = (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \end{aligned}$$

مثال ۴.۴.۴. رأس‌های چهار وجهی $ABCD$ داده شده‌اند:

$$A(0, 0, 2), B(3, 0, 5), C(1, 1, 0), D(4, 1, 2)$$

حجم چهار وجهی و طول ارتفاع وارد از رأس D را، در آن، پیدا کنید.
حل. داریم:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|, h = \frac{|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|}{|[\vec{AB}, \vec{AC}]|}$$

چون $\vec{AB} = (3, 0, 3)$ و $\vec{AC} = (1, 1, -2)$ پس

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, 9, 3),$$

$$|[\vec{AB}, \vec{AC}]| = 3\sqrt{11}$$

به جز این

$$\vec{AD} = (4, 1, 0), (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{AD}, [\vec{AB}, \vec{AC}]) =$$

$$= 4(-3) + 1 \times 9 + 0 \times 3 = -3$$

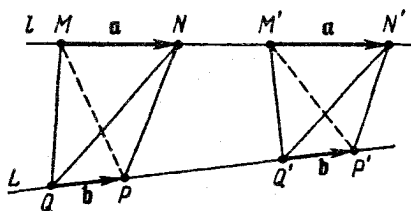
$$h = \frac{1}{\sqrt{11}} \text{ و } V_{ABCD} = \frac{1}{4}$$

مثال ۳.۴.۵. يك چهار وجهی را در نظر می گیریم که به وسیله دو پاره خط متعلق به دو خط راست متنافر، مشخص شده است. ثابت کنید، اگر این دو پاره خط راست، روی همان دو خط راست متنافر جابجا شوند (و البته، طول آنها تغییر نکند)، حجم چهار وجهی تغییر نمی کند.

حل. l و L را دو خط راست متنافر، M, N, M', N' را نقطه هائی از l و P, Q, P', Q' را نقطه هائی از L می گیریم، به نحوی که (شکل ۱۴.۴):

$$\vec{MN} = \vec{M'N'} = \mathbf{a}, \vec{QP} = \vec{Q'P'} = \mathbf{b}$$

در این صورت داریم (مثال ۳.۴.۴ را ببینید):



شکل ۱۴-۴

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6} |(a, b, \vec{QN})|, \quad V_{M'N'P'Q'} = \frac{1}{6} |(a, b, \vec{Q'N'})|$$

چون $\vec{QN} = \vec{QQ'} + \vec{Q'N'} + \vec{N'N} = \lambda b + \vec{Q'N'} + \mu a$ (بردارهای $\vec{QP} = b$ و $\vec{QQ'}$ هم راستا هستند، بنابراین عدد λ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم $\vec{QQ'} = \lambda b$ ؛ و به همین ترتیب، عدد μ وجود دارد، به نحوی که برای آن داشته باشیم $\vec{N'N} = \mu a$).

$$(a, b, \vec{QN}) = \lambda(a, b, b) + (a, b, \vec{Q'N'}) + \mu(a, b, a)$$

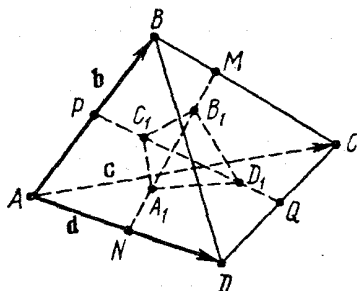
جمله‌های اول و سوم، در سمت راست برابری فوق، صفرند (ویژگی 4°) و بنابراین

$$(a, b, \vec{QN}) = (a, b, \vec{Q'N'}) \Rightarrow V_{MNPQ} = V_{M'N'P'Q'}$$

مثال ۶۰۴.۴. در چهار وجهی $ABCD$ ، نقطه‌های M ، N ، P و Q را، به ترتیب، روی یال‌های $[BC]$ ، $[AD]$ ، $[AB]$ و $[CD]$ انتخاب کرده‌ایم و داریم:

$|AP| = |PB|$ ، $|AN| = |ND|$ ، $|CQ| = |QD|$ ، $|MC| = 2|BM|$
جفت نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 ، D_1 را بر پاره‌خط‌های راست $[NM]$ و $[PQ]$ طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|NA_1| = |A_1B_1| = |B_1M|, \quad |PC_1| = |C_1D_1| = |D_1Q|$$



شکل ۱۵.۴

نسبت حجم دو چهار وجهی $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ را پیدا کنید.
 حل. پایه $\vec{AB} = \mathbf{b}$, $\vec{AC} = \mathbf{c}$, $\vec{AD} = \mathbf{d}$ را در نظر می گیریم (شکل ۱۵.۴). در این پایه داریم:

$$\begin{aligned}\vec{C_1D_1} &= \frac{1}{3} \vec{PQ} = \frac{1}{3} (\vec{PA} + \vec{AQ}) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{b} + \frac{1}{2} (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \right) = \\ &= \frac{1}{6} (-\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A_1B_1} &= \frac{1}{3} \vec{NM} = \frac{1}{3} \left(\vec{NA} + \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{BC} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{d} + \mathbf{b} + \frac{1}{3} (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \right) = \frac{2}{9} \mathbf{b} + \frac{1}{9} \mathbf{c} - \frac{1}{6} \mathbf{d}\end{aligned}$$

به جز آن

$$\vec{AC_1} = \vec{AP} + \vec{C_1D_1} = \frac{1}{3} \mathbf{b} + \frac{1}{6} \mathbf{c} + \frac{1}{6} \mathbf{d},$$

$$\vec{AA_1} = \vec{AN} + \vec{A_1B_1} = \frac{2}{9} \mathbf{b} + \frac{1}{9} \mathbf{c} + \frac{1}{3} \mathbf{d}$$

در نتیجه: $\vec{C_1A_1} = -\frac{1}{9}\mathbf{b} - \frac{1}{18}\mathbf{c} + \frac{1}{6}\mathbf{d}$ ؛ و حجم چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ چنین می شود:

$$\frac{1}{6} |(\vec{A_1B_1}, \vec{C_1D_1}, \vec{C_1A_1})| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} \times (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \right| =$$

$$= \frac{1}{216} \times \frac{1}{6} |(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})| = \frac{1}{216} V_{ABCD}$$

مثال ۷۰۴.۴. ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$$

آن وقت، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه‌اند.
حل. اگر دو طرف رابطه فرض را در $\mathbf{a}$ ضرب اسکالر کنیم، به دست می آید:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) + (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) + (\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}])$$

و چون دو جمله اول و سوم، درست راست برابری، برابر صفرند، بنابراین

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \mathbf{0}$$

و در نتیجه، بنابر ویژگی 1° حاصل ضرب اسکالر سه بردار، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ ، هم صفحه‌اند.

مثال ۸۰۴.۴. ثابت کنید، اگر بردارهای $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ، $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ و $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ هم صفحه باشند، هم راستا هم هستند.

حل. بردارهای $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ، $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ و $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ را هم صفحه فرض می کنیم.
در این صورت، این بردارها باهم، بستگی خطی دارند، یعنی عددهای x ، y و z (که هر سه باهم صفر نیستند) وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$x[a, b] + y[b, c] + z[c, a] = 0$$

این برابری را در بردارهای a, b, c ضرب اسکالر می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$y(a, b, c) = 0, \quad z(a, b, c) = 0, \quad x(a, b, c) = 0$$

از آنجا $(x^2 + y^2 + z^2)(a, b, c)^2 = 0$ ؛ در نتیجه $(a, b, c) = 0$.
بردارهای a, b, c هم‌صفحه‌اند (در واقع، با صفحه‌ای مثل P موازی‌اند).
هر يك از بردارهای $[a, b]$ ، $[b, c]$ و $[c, a]$ (بنابر ویژگی‌های I و III از ضرب برداری) یا صفراند و یا با خط راستی عمود بر صفحه P موازی‌اند.
به این ترتیب، این سه بردار هم‌راستا می‌شوند.

مثال ۹۰۴.۴. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$[[a, b], [c, d]] = c(a, b, d) - d(a, b, c) \quad (۴.۲۳)$$

حل. با توجه به دستور (۴.۹) مربوط به ضرب سه گانه برداری و با توجه به ویژگی ۴° مربوط به حاصل ضرب سه گانه (از اسکالر) بردارها، داریم:

$$\begin{aligned} [[a, b], [c, d]] &= c([a, b], d) - d([a, b], c) = \\ &= c(d, a, b) - d(c, a, b) = c(a, b, d) - d(a, b, c) \end{aligned}$$

مثال ۱۰۴.۴. ثابت کنید:

$$([a, b], [b, c], [c, a]) = (a, b, c)^2 \quad (۴.۲۴)$$

حل. با توجه به اتحاد (۴.۲۳) داریم:

$$\begin{aligned} [[b, c], [c, a]] &= c(b, c, a) - a(b, c, c) = \\ &= c(b, c, a) = (a, b, c)c \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ([a, b], [b, c], [c, a]) &= ([a, b], (a, b, c)c) = \\ &= (a, b, c)([a, b], c) = (a, b, c)(c, a, b) = \\ &= (a, b, c)^2 \end{aligned}$$

دستورهای (۴.۲۴) و (۴.۲۳)، به ما کمک می کنند تا راه حل دومی را برای مسأله ۸.۴.۴ به دست آوریم: اگر بردارهای $[a, b]$ ، $[b, c]$ و $[c, a]$ هم صفحه باشند، آن وقت حاصل ضرب اسکالر سه گانه آن ها برابر صفر است. در نتیجه، با توجه به دستور (۴.۲۴)، $(a, b, c) = 0$. سپس، با توجه به دستور (۴.۲۳) داریم:

$$[(a, b), (c, a)] = c(a, b, c) - a(a, b, c) = 0$$

یعنی بردارهای $[a, b]$ و $[c, a]$ هم راستا هستند. به همین ترتیب، تحقیق می شود:

$$[(a, b), (b, c)] = [(b, c), (c, a)] = 0$$

مثال ۱۱.۴.۴. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$(a, b, c)d = (d, b, c)a + (a, d, c)b + (a, b, d)c$$

حل. بردار $m = [(a, b), (c, d)]$ را در نظر می گیریم. بنا بر دستور (۴.۲۳)

$$m = c(a, b, d) - d(a, b, c)$$

بردار m را به این صورت هم می توان نوشت:

$$m = -[(c, d), (a, b)] = [(c, d), (b, a)] =$$

$$= b(c, d, a) - a(c, d, b)$$

[دوباره از دستور (۴.۲۳) استفاده کرده ایم]. بنابراین

$$c(a, b, d) - d(a, b, c) = m = -b(a, d, c) - a(d, b, c)$$

که از آن جا به اتحاد مورد نظر می رسیم.

مثال ۱۲.۴.۴. a, b, c و d را شعاع های حامل چهار نقطه A, B, C و D از فضا، نسبت به يك قطب O ، می گیریم. ثابت کنید، این چهار نقطه، تنها وقتی بر يك صفحه واقع اند که داشته باشیم:

$$(a, b, c) + (a, c, d) = (b, c, d) + (b, d, a)$$

حل. چهار نقطه A و B و C و D ، وقتی و تنها وقتی در یک صفحه اند که

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0 \iff (b-a, c-a, d-a) = 0$$

با توجه به ویژگی خطی حاصل ضرب اسکالر سه بردار و با توجه به ویژگی ۴۰، داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= (b-a, c-a, d-a) = (b, c-a, d-a) - \\ &- (a, c-a, d-a) = (b, c, d-a) - (b, a, d-a) - \\ &- (a, c, d-a) + (a, a, d-a) = (b, c, d) - (b, c, a) - \\ &- (b, a, d) + (b, a, a) - (a, c, d) + (a, c, a) + \\ &+ (a, a, d) - (a, a, a) = (b, c, d) + (b, d, a) - \\ &- [(a, b, c) + (a, c, d)] \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۴.۴. بردارهای $\vec{a} = \vec{DA}$ ، $\vec{b} = \vec{DB}$ و $\vec{c} = \vec{DC}$ را، سه یالی از چهار وجهی $ABCD$ می گیریم که از رأس D خارج شده اند. بردار ارتفاع $\vec{DH}$ از چهار وجهی را، که از رأس D بر صفحه (ABC) رسم شده است پیدا کنید.

حل. بردار $\vec{BH}$ با بردارهای نا هم راستای $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ هم صفحه است. بنابراین، عددهای λ و μ وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$\vec{BH} = \lambda(\vec{a} - \vec{b}) + \mu(\vec{c} - \vec{b})$$

بردار $\vec{DH}$ بر صفحه (ABC) عمود است، یعنی با بردار

$$\vec{d} = [\vec{BC}, \vec{BA}] = [\vec{c} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}]$$

هم راستا است. بنابراین عدد v وجود دارد، به نحوی که $\vec{DH} = v\vec{d}$. با توجه به دور $DHBD$ داریم: $\vec{DH} - \vec{BH} - \vec{DB} = 0$ ، یعنی

$$v[(\vec{c}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c})] = \lambda\vec{a} + (1 - \lambda - \mu)\vec{b} + \mu\vec{c}$$

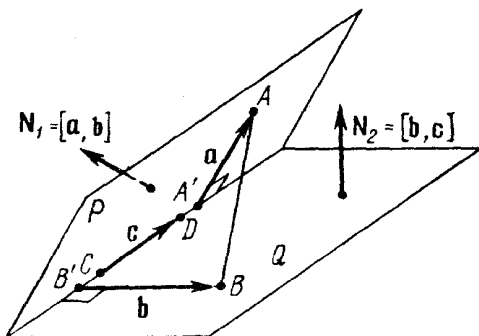
اگر دو طرف رابطه بالا را، در d ضرب اسکالر کنیم، به دست می آید:

$$v|d|^2 = (a, b, c) \Rightarrow v = \frac{(a, b, c)}{|d|^2}$$

به این ترتیب

$$DH = \frac{(a, b, c)}{|[c, a] + [a, b] + [b, c]|^2} ([c, a], [a, b], [b, c])$$

مثال ۱۴.۴.۴. نقطه‌های A و B روی دو وجه مختلف فرجه‌ای داده شده‌اند و می‌دانیم، پاره‌خط راست $[AB]$ ، با دو وجه فرجه، زاویه‌های برابر می‌سازد. ثابت کنید، این وضع، وقتی و تنها وقتی پیش می‌آید که دو نقطه A و B از یال فرجه (فصل مشترك دو صفحه)، به يك فاصله باشد.



شکل ۱۴.۴

حل. P و Q را وجه‌های این فرجه می‌گیریم (شکل ۱۴.۴). N_1 و N_2 را، به ترتیب، بردارهای نرمال صفحه‌های P و Q ، $A \in P$ و $B \in Q$ ، $C \in Q$ و D را دو نقطه متمایز از یال فرجه و، بالاخره، A' و B' را پای عمودهای وارد از نقطه‌های A و B بر خط راست (CD) فرض می‌کنیم. بردارهای

$\vec{a} \perp \vec{c}$ و $\vec{a} = \vec{A'A}$ ، $\vec{b} = \vec{B'B}$ و $\vec{c} = \vec{C'D}$ ، تشکیل يك پایسه می‌دهند و $\vec{b} \perp \vec{c}$ بردارهای N_1 و N_2 را می‌توانیم، این‌طور انتخاب کنیم:

$$N_1 = [\vec{a}, \vec{c}], |N_1| = |\vec{a}| |\vec{c}|, N_2 = [\vec{b}, \vec{c}], |N_2| = |\vec{b}| |\vec{c}|$$

با توجه به دستور (۳.۵۳)، پاره‌خط راست $[AB]$ ، وقتی و تنها وقتی، با صفحه‌های P و Q ، زاویه‌های برابر می‌سازد که داشته باشیم:

$$\frac{|(N_1, \vec{AB})|}{|N_1| |\vec{AB}|} = \frac{|(N_2, \vec{AB})|}{|N_2| |\vec{AB}|} \quad \text{یا} \quad \frac{|(\vec{AB}, \vec{a}, \vec{c})|}{|\vec{a}|} = \frac{|(\vec{AB}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{b}|}$$

بردار $\vec{AB}$ را، نسبت به پایه $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ تجزیه می‌کنیم:

$$\vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b} + \lambda \vec{c}$$

(λ ، معلوم نیست). با توجه به ویژگی‌های 7° و 4° حاصل ضرب اسکالر سه بردار، داریم:

$$\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{a}, \vec{c}) &= -(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) + \lambda(\vec{c}, \vec{a}, \vec{c}) = \\ &= (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}), \quad (\vec{AB}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) \end{aligned}$$

به این ترتیب، پاره‌خط راست $[AB]$ ، تنها وقتی با صفحه‌های P و Q ، زاویه‌های برابر می‌سازد که داشته باشیم: $\frac{1}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{b}|}$ ، یعنی $|AA'| = |BB'|$.

مثال ۱۵۰۴۰۴. بردارهای $\vec{e}_1$ ، $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ هم‌صفحه نیستند. ثابت کنید، بردارهای $\vec{f}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$ ، $\vec{f}_2 = [\vec{e}_3, \vec{e}_1]$ و $\vec{f}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ ، با ترتیب مشخصی، يك پایه راست گرد می‌سازند.

حل. بنابه دستور (۴.۲۴) داریم:

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2$$

چون $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ يك پایه است، پس $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2 > 0$. بنابراین، با توجه به ویژگی 3° از حاصل ضرب اسکالر سه بردار، $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ پایه‌ای راست گرد است.

اگر پایه $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ را از روی پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ طوری بسازیم که داشته باشیم:

$$e'_1 = \frac{[e_2, e_3]}{(e_1, e_2, e_3)}, e'_2 = \frac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)}, e'_3 = \frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)} \quad (۴.۲۵)$$

آن وقت، پایه $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ را، معکوس (یا متقابل) پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ گویند. از ویژگی‌های حاصل ضرب اسکالر سه بردار، می‌توان نتیجه گرفت که، برای همه مقادیرهای $1, 2, 3$ ، i, j داریم:

$$(e_i, e'_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (۴.۲۶)$$

و با توجه به دستور (۴.۲۴):

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = \frac{1}{(e_1, e_2, e_3)} \quad (۴.۲۷)$$

مثال ۱۶.۴۰۴. مطلوب است شعاع حامل X ، مربوط به نقطه M ، نقطه مشترک سه صفحه

$$P_1: (r, N_1) = D_1, P_2: (r, N_2) = D_2, P_3: (r, N_3) = D_3$$

به شرطی که بدانیم: $(N_1, N_2, N_3) \neq 0$.

حل. بردار مطلوب X ، در این دستگاه معادله‌ها صدق می‌کند:

$$(x, N_1) = D_1, (x, N_2) = D_2, (x, N_3) = D_3 \quad (۴.۲۸)$$

تجزیه بردار x را در پایه $\{N'_1, N'_2, N'_3\}$ ، عکس پایه $\{N_1, N_2, N_3\}$ جست‌وجو می‌کنیم:

$$x = yN'_1 + zN'_2 + tN'_3$$

بنابراین

$$(x, N_1) = y(N_1, N'_1) + z(N_1, N'_2) + t(N_1, N'_3) = y$$

(۴.۲۶) را ببینید. به همین ترتیب

$$(x, N_1) = z, (x, N_2) = t$$

یعنی، دستگاه معادله‌های (۴.۲۸)، به این صورت درمی‌آیند:

$$y = D_1, z = D_2, t = D_3$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} x &= D_1 N'_1 + D_2 N'_2 + D_3 N'_3 = \\ &= \frac{D_1 [N_2, N_3] + D_2 [N_3, N_1] + D_3 [N_1, N_2]}{(N_1, N_2, N_3)} \quad (4.29) \end{aligned}$$

مثال ۱۷.۴.۴. بردار x را طوری پیدا کنید که با سه بردار ناهم‌صفحه

a, b و c ، زاویه‌های برابر بسازد.

حل. پیدا کردن x ، به معنای حل این دستگاه است:

$$(x, a) = \alpha, (x, b) = \beta, (x, c) = \gamma$$

که در آن $\gamma = |x| |c| \cos \varphi$, $\beta = |x| |b| \cos \varphi$, $\alpha = |x| |a| \cos \varphi$ عبارت است از زاویه‌ای که x با هر یک از بردارهای a, b و c می‌سازد. با توجه به دستور (۴.۲۹)، برای دستگاه (۴.۲۸) داریم:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha [b, c] + \beta [c, a] + \gamma [a, b]}{(a, b, c)} = \\ &= |x| \cos \varphi \frac{|a| [b, c] + |b| [c, a] + |c| [a, b]}{(a, b, c)} \end{aligned}$$

از آن جا که، بنا به فرض، طول بردار x می‌تواند دلخواه باشد، می‌توانیم بردار زیر را، به عنوان جواب، در نظر بگیریم:

$$x = \frac{|a| [b, c] + |b| [c, a] + |c| [a, b]}{(a, b, c)},$$

که در آن، t ، می‌تواند هر عدد حقیقی مخالف صفر باشد.

مثال ۱۸.۴.۴. ثابت کنید، برای بردارهای دلخواه a, b, c, x و

z داریم:

$$(a, b, c)(x, y, z) = \begin{vmatrix} (x, a) & (x, b) & (x, c) \\ (y, a) & (y, b) & (y, c) \\ (z, a) & (z, b) & (z, c) \end{vmatrix} \quad (۴.۳۰)$$

حل. اگر داشته باشیم: $(a, b, c) = 0$ ، به معنای آن است که، بردارهای a ، b و c هم صفحه‌اند. در این صورت، می‌توان یکی از این سه بردار، و مثلاً بردار a را، نسبت به دو تای دیگر تجزیه کرد:

$$a = \alpha b + \beta c$$

بنابراین

$$(x, a) = \alpha(x, b) + \beta(x, c),$$

$$(y, a) = \alpha(y, b) + \beta(y, c),$$

$$(z, a) = \alpha(z, b) + \beta(z, c)$$

به این ترتیب، در دترمینان (۴.۳۰)، ستون اول، یک ترکیب خطی از ستون‌های دوم و سوم است؛ یعنی این دترمینان برابر صفر است. پس، در حالت $(a, b, c) = 0$ ، برابری (۴.۳۰) برقرار است: هر دو طرف رابطه، برابر صفر می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم $(a, b, c) \neq 0$ ، یعنی $\{a, b, c\}$ یک پایه است. بردارهای x ، y و z را، نسبت به پایه $\{a', b', c'\}$ ، عکس پایه $\{a, b, c\}$ ، تجزیه می‌کنیم:

$$x = \alpha_1 a' + \alpha_2 b' + \alpha_3 c',$$

$$y = \beta_1 a' + \beta_2 b' + \beta_3 c',$$

$$z = \gamma_1 a' + \gamma_2 b' + \gamma_3 c'$$

بنابردستور (۴.۲۱): $(x, y, z) = \Delta(a', b', c')$ ، که در آن

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

اگر دستور (۴.۲۷) را به یاد آوریم، سمت چپ برابری (۴.۳۰) را، می توان این طور نوشت:

$$(a, b, c)(x, y, z) = (a, b, c)(a', b', c') \cdot \Delta = \Delta$$

از طرف دیگر، با توجه به (۴.۲۶):

$$(x, a) = (a, x) = (a, \alpha_1 a' + \alpha_2 b' + \alpha_3 c') = \alpha_1,$$

$$(x, b) = \alpha_2, (x, c) = \alpha_3, (y, a) = \beta_1, (y, b) = \beta_2,$$

$$(y, c) = \beta_3, (z, a) = \gamma_1, (z, b) = \gamma_2, (z, c) = \gamma_3$$

یعنی، عبارت سمت راست برابری (۴.۳۰)، برابر است با دترمینان Δ .

مثال ۱۹.۴.۴. در متوازی السطوح $ABCD A' B' C' D'$ ، طول

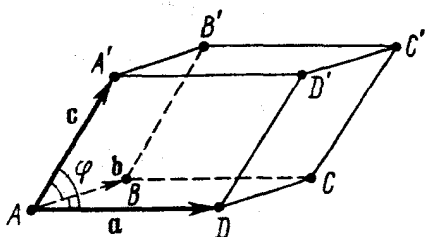
هر یک از یال ها برابر واحد و $\widehat{DAB} = \widehat{DAA'} = \widehat{BAA'}$. مقدار هر یک از

این زاویه ها را پیدا کنید، به شرطی که حجم متوازی السطوح برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$

باشد.

حل. با توجه به دستور (۴.۳۰) داریم:

$$(a, b, c)^2 = \begin{vmatrix} (a, a) & (a, b) & (a, c) \\ (a, b) & (b, b) & (b, c) \\ (a, c) & (b, c) & (c, c) \end{vmatrix} \quad (4.31)$$



فرض می‌کنیم: $\vec{a} = \vec{AD}$, $\vec{b} = \vec{AB}$ و $\vec{c} = \vec{AA'}$. حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ و $\vec{AA'}$ بنا شود، چنین است:

$$V_{ABCD A'B'C'D'} = \sqrt{\begin{vmatrix} (\vec{AD}, \vec{AD}) & (\vec{AD}, \vec{AB}) & (\vec{AD}, \vec{AA'}) \\ (\vec{AD}, \vec{AB}) & (\vec{AB}, \vec{AB}) & (\vec{AB}, \vec{AA'}) \\ (\vec{AD}, \vec{AA'}) & (\vec{AB}, \vec{AA'}) & (\vec{AA'}, \vec{AA'}) \end{vmatrix}} \quad (۴.۳۲)$$

بنا به فرض $1 = |\vec{AD}| = |\vec{AB}| = |\vec{AA'}|$ ، یعنی

$$(\vec{AD}, \vec{AD}) = (\vec{AB}, \vec{AB}) = (\vec{AA'}, \vec{AA'}) = 1,$$

$$(\vec{AD}, \vec{AB}) = (\vec{AD}, \vec{AA'}) = (\vec{AB}, \vec{AA'}) = \cos \varphi,$$

که در آن $\varphi = \widehat{DAB} = \widehat{DAA'} = \widehat{BAA'}$ (شکل ۱۷.۴). با توجه به دستور (۴.۳۲) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & w & w \\ w & 1 & w \\ w & w & 1 \end{vmatrix}} = \sqrt{2w^3 - 3w^2 + 1}$$

که در آن $w = \cos \varphi$. از حل معادله $2w^3 - 3w^2 + \frac{1}{2} = 0$ به دست می‌آید:

$$0 = 2w^3 - 3w^2 + \frac{1}{2} = 2w^3 - w^2 - \left(2w^2 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2w^2\left(w - \frac{1}{2}\right) - 2\left(w + \frac{1}{2}\right)\left(w - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\left(w - \frac{1}{2}\right)\left(w - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(w + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

که با در نظر گرفتن $|w| = |\cos \varphi| \leq 1$ ، خواهیم داشت:

$$\varphi_1 = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ,$$

$$\varphi_2 = \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = 180^\circ - \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

مثال ۳۰.۴.۴. حجم چهاروجهی $ABCD$ را بر حسب طول یال‌های $a = |AD|$ ، $b = |BD|$ ، $c = |CD|$ و زاویه‌های مسطحه کنج به رأس D ، یعنی $\alpha = ADB$ ، $\beta = BDC$ و $\gamma = CDA$ محاسبه کنید.

حل. از نتیجه مثال ۳۰.۴.۴ و دستور (۴.۳۲) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} (\vec{DA}, \vec{DA}) & (\vec{DA}, \vec{DB}) & (\vec{DA}, \vec{DC}) \\ (\vec{DA}, \vec{DB}) & (\vec{DB}, \vec{DB}) & (\vec{DB}, \vec{DC}) \\ (\vec{DA}, \vec{DC}) & (\vec{DB}, \vec{DC}) & (\vec{DC}, \vec{DC}) \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a^2 & ab \cos \alpha & accos \gamma \\ ab \cos \alpha & b^2 & bccos \beta \\ accos \gamma & bccos \beta & c^2 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \end{aligned}$$

مثال ۳۱.۴.۴. ثابت کنید، حجم چهاروجهی $ABCD$ را می‌توان با دستور

$$V = \frac{1}{6} |AD| \cdot |BC| \cdot |d \sin \varphi|$$

به دست آورده، در آن، φ زاویه بین خط‌های راست (AD) و (BC) ، و d فاصله بین این دو خط راست است.

حل. حجم V چهاروجهی $ABCD$ برابر است با

$$V = \frac{1}{6} |(AB, AD, BC)|$$

(مثال ۳۰.۴.۴ را ببینید). $M \in (AD)$ و $N \in (BC)$ را، نقطه‌های برخورد

عمود مشترك خط‌های راست (AD) و (BC) با این دو خط می‌گیریم؛ پس $d = |\vec{MN}|$ ، و در ضمن، بردار $\vec{MN}$ ، که بر بردارهای $\vec{AD}$ و $\vec{BC}$ عمود است، با بردار $[\vec{AD}, \vec{BC}]$ هم‌راستا است. λ و μ را عددهایی فرض می‌کنیم که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $\vec{AM} = \lambda \vec{AD}$ و $\vec{BN} = \mu \vec{BC}$. بنا بر این

$$\vec{AB} = \lambda \vec{AD} + \vec{MN} - \mu \vec{BC},$$

$$(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{BC}) = \lambda(\vec{AD}, \vec{AD}, \vec{BC}) + (\vec{MN}, \vec{AD}, \vec{BC}) - \mu(\vec{BC}, \vec{AD}, \vec{BC}) = (\vec{MN}, [\vec{AD}, \vec{BC}])$$

از آن‌جا

$$V = \frac{1}{6} |(MN, [AD, BC])| = \frac{1}{6} d |[AD, BC]|$$

(بردارهای $[\vec{AD}, \vec{BC}]$ و $\vec{MN}$ هم‌راستا هستند). چون

$$|[\vec{AD}, \vec{BC}]| = |AD| \cdot |BC| \cdot \sin \varphi$$

بنا بر این

$$V = \frac{1}{6} |AD| \cdot |BC| \cdot d \sin \varphi$$

مثال ۲۲.۴.۴* چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. نقطه‌های N, M

و P را، به ترتیب، بر یال‌های $[AB]$ ، $[CD]$ و امتداد یال $[AC]$ (از طرف C) انتخاب کرده‌ایم، به نحوی که

$$|AM| : |AB| = \lambda, \quad |CN| : |CD| = \mu, \quad |PC| : |CA| = \nu$$

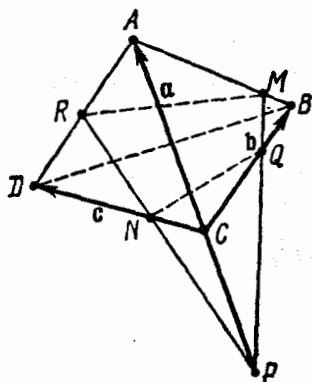
مطلوب است حجم بخشی که به وسیله صفحه (MNP) از چهاروجهی جدا می‌شود، به شرطی که حجم خود چهاروجهی برابر V باشد.

حل. R و Q را، نقطه‌های برخورد صفحه (MNP) با خط‌های راست

(BC) و (DA) می‌گیریم (شکل ۱۸.۴). حجم چندوجهی $RAMQCN$

برابر است با $V_1 - V_2$ که در آن

$$V_1 = \frac{1}{6} |(\vec{PA}, \vec{PM}, \vec{PR})|, V_2 = \frac{1}{6} |(\vec{PC}, \vec{PQ}, \vec{PN})|$$



به ترتیب، عبارتند از حجم‌های چهار-وجهی‌های $PRAM$ و $PNCQ$ ، به محاسبه بردارهایی می‌پردازیم که در حجم این چهاروجهی‌ها دخالت دارند. فرض می‌کنیم: $\vec{CB} = \mathbf{b}$, $\vec{CA} = \mathbf{a}$ و $\vec{CD} = \mathbf{c}$. داریم:

$$V = \frac{1}{6} |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|, \vec{PM} = (\nu + 1)\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

شکل ۱۸-۴

فرض می‌کنیم: $\vec{PQ} = x\vec{PM}$ و $\vec{CQ} = y\mathbf{b}$ و با استفاده از دور $PCQP$ ، x و y را محاسبه می‌کنیم:

$$0 = \vec{PC} + \vec{CQ} - \vec{PQ} = \nu\mathbf{a} + y\mathbf{b} - x[(\nu + 1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}]$$

که با توجه به منحصر بودن تجزیه و رابطه با پایه $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ به دست می‌آید:

$$y = x\lambda, \quad \nu = x(\nu + 1 - \lambda)$$

$$x = \frac{\nu}{1 + \nu - \lambda} \quad \text{بنابراین}$$

اکنون فرض می‌کنیم: $\vec{PR} = z\vec{PN}$ و $\vec{RA} = w\vec{DA}$. مقادارهای مجهول z و w را، با استفاده از دور $PRAP$ پیدا می‌کنیم:

$$0 = \vec{PR} + \vec{RA} - \vec{PA} = z(\vec{PC} + \vec{CN}) + w(\mathbf{a} - \mathbf{c}) - \vec{PA} = (z\nu + w - \nu - 1)\mathbf{a} + (z\mu - w)\mathbf{c}$$

بنابراین $z\nu + w - \nu - 1 = 0$ و $z\mu - w = 0$. از مجموع این دو برابری،

به دست می آید: $z = \frac{\nu+1}{\mu+\nu}$ و سرانجام

$$V_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \nu+1 & 0 & 0 \\ \nu+1-\lambda & \lambda & 0 \\ z\nu & 0 & z\mu \end{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$$

$$= (\nu+1)\lambda z\mu V = \frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu} V;$$

$$V_2 = \frac{1}{6} \left| \left(\frac{\nu}{1+\nu} PA, xPM, \frac{1}{z} PR \right) \right| = \frac{\nu x}{z(\nu+1)} V_1;$$

$$V_1 - V_2 = \left(1 - \frac{\nu x}{z(\nu+1)} \right) \frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu} V =$$

$$= \left(1 - \frac{\nu^2(\mu+\nu)}{(\nu+1)^2(1+\nu-\lambda)} \right) \frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu} V$$

حالت خاصی از این جواب جالب است. اگر فرض کنیم $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$

یعنی صفحه (MNP) از وسط یال‌های متناظر چهاروجهی بگذرد. در این

حالت (مستقل از مقدار ν) داریم: $V_1 - V_2 = \frac{1}{3} V$ ؛ یعنی صفحه‌ای که از

وسط یال‌های متناظر چهاروجهی عبور کند، چهاروجهی را به دو بخش هم‌ارز تقسیم می‌کند.

مثال ۲۳.۴.۴. (قانون کسینوس، برای کنج سه وجهی). زاویه‌های

مسطحه $\widehat{AOB}$ ، $\widehat{BOC}$ و $\widehat{COA}$ از کنج سه وجهی $OABC$ (شکل ۱۹.۴)،

به ترتیب، برابرند با α ، β و γ . ثابت کنید، زاویه مسطحه B از فرجه به یال

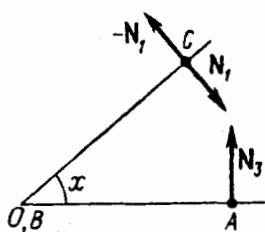
$[OB]$ ، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\cos B = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (۴.۳۳)$$

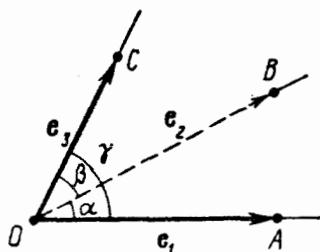
حل. بردارهای واحد $\vec{e}_1 = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}$, $\vec{e}_2 = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$ و $\vec{e}_3 = \frac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$N_1 = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{|\vec{N}_1|} = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \sin \beta = \sin \beta, \quad N_2 = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{|\vec{N}_2|} = \sin \alpha$$

بردارهای نرمال صفحه‌های (COB) و (AOB) هستند (شکل ۲۰.۴). این شکل، تصویر زاویه مسطحه فرجه یسال $[OB]$ را بر صفحه عمود بر (OB) نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۴



شکل ۱۹.۴

بنابر ویژگی زاویه‌هایی که ضلع‌های متناظر عمود برهم دارند:

$$\cos B = \cos(180^\circ - (\widehat{N_1, N_2})) = -\frac{(N_1, N_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = -\frac{(N_1, N_2)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

برای محاسبه (N_1, N_2) ، از دستور مربوط به ضرب برداری سه بردار استفاده می‌کنیم:

$$[\vec{e}_2, \vec{N}_1] = [\vec{e}_2, (\vec{e}_2, \vec{e}_3)] = \vec{e}_2(\vec{e}_2, \vec{e}_3) - \vec{e}_3(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$$

$$\begin{aligned}(N_1, N_2) &= (N_1, e_1, e_2) = (e_1, e_2, N_1) = (e_1, [e_2, N_1]) = \\ &= (e_1, e_2)(e_2, e_3) - (e_1, e_3)|e_2|^2 = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma\end{aligned}$$

بنابراین

$$\cos \hat{B} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$$

مثال ۲۴.۴.۴. ثابت کنید: (a) هر زاویه مسطحه کنج سه وجهی، از مجموع دو زاویه دیگر کمتر است؛ (b) مجموع زاویه‌های هر کنج سه وجهی از 360° درجه کمتر است.

حل. (a) از نمادهای مسأله قبل استفاده می‌کنیم. چون

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ, \quad 0^\circ < \beta < 180^\circ, \quad 0^\circ < \hat{B} < 180^\circ$$

اگر از دستور (۴.۳۳) استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$\cos \gamma = \cos(\alpha + \beta) + (1 + \cos \hat{B}) \sin \alpha \sin \beta > \cos(\alpha + \beta)$$

چون کسینوس، در بازه $[0^\circ, 180^\circ]$ نزولی یکنوا (مونوتون) است، از نابرابری $\cos \gamma > \cos(\alpha + \beta)$ می‌توان نتیجه گرفت که، با شرط $0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ$ ، داریم $\gamma < \alpha + \beta$. در حالتی که داشته باشیم: $\alpha + \beta > 180^\circ$ ، آن وقت نابرابری $\alpha + \beta > \gamma$ روشن است، زیرا $\gamma < 180^\circ$.

(b) نابرابری بالا را به این صورت می‌نویسیم:

$$0 < \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

با استفاده از همان نابرابری بخش (a) می‌توان نوشت:

$$0^\circ < \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} < \frac{\alpha + \beta}{2} < 180^\circ$$

یعنی $\sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} > 0$ و به دست می آید: $\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} > 0$ و چون

$$0^\circ < \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma) < 270^\circ$$

$$0^\circ < \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma) < 180^\circ \iff \alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$$

بخش ۵.۴. مسأله‌هایی در باره خط راست و صفحه

مثال ۵.۴.۱۰. معادله بردار پارامتری خط راست l ، فصل مشترك دو

صفحه غیر موازی P_1 و P_2 را بنویسید، به شرطی که

$$P_1: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) = D_1, \quad P_2: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) = D_2$$

حل. دوش اول. بردار $\mathbf{r}$ ، وقتی و تنها وقتی، شعاع حامل نقطه‌ای از

خط راست l است که داشته باشیم:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) = D_2$$

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) - \mathbf{N}_2(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) = D_2 \mathbf{N}_1 - D_1 \mathbf{N}_2$$

(معادله سوم دستگاه معادله‌های فوق، نتیجه آشکار دو معادله اول است). از

دستور حاصل ضرب سه گانه برداری استفاده می‌کنیم و معادله سوم این دستگاه

را، به صورت زیر می‌نویسیم:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M} \quad (4.34)$$

که در آن $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ و $\mathbf{M} = D_2 \mathbf{N}_1 - D_1 \mathbf{N}_2$. معادله (۴.۳۴)،

معادله برداری خط راستی مانند l^* است (مثال ۳.۳.۴ را ببینید) و آن را

به طور کامل تعریف می‌کند. این معادله (۴.۳۴)، برای همه شعاع‌های حامل

نقطه‌های واقع بر خط راست l ، صادق است؛ بنابراین $l \subset l^*$ ، یعنی (۴.۳۴).

معادله برداری خط راست l است. این معادله را به صورت پارامتری

می‌نویسیم. طبق دستور (۴.۱۳) داریم:

$$\mathbf{r} = \frac{[(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2), D_2 \mathbf{N}_1 - D_1 \mathbf{N}_2]}{||[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]||^2} + [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]t, t \in \mathbb{R} \quad (۴.۳۵)$$

روش دوم. خط راست l ، روی هر دو صفحه P_1 و P_2 قرار دارد و بر هر دو بردار $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ عمود است. در نتیجه (مثال ۹.۳.۴ را ببینید)، $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ بردار هادی خط راست l است. بردار $\mathbf{r}_0$ (شعاع حامل نقطه اولیه خط راست l)، به عنوان شعاع حامل پای عمود وارد از قطب بر خط راست l به دست می آید، یعنی به عنوان جواب دستگاه معادله های

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1) = D_1, (\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_2) = D_2, (\mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0$$

($\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$) این دستگاه معادله ها، از نوع (۴.۲۸) است؛ و بنا بر دستور (۴.۲۹)، جواب آن به دست می آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \frac{D_1[\mathbf{N}_2, \mathbf{a}] + D_2[\mathbf{a}, \mathbf{N}_1] + 0 \cdot [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]}{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{a})} = \\ &= \frac{[\mathbf{a}, D_2 \mathbf{N}_1 - D_1 \mathbf{N}_2]}{(\mathbf{a}, [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2])} = \frac{[(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2), D_2 \mathbf{N}_1 - D_1 \mathbf{N}_2]}{||[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]||^2} \end{aligned}$$

و معادله پارامتری l ، به این صورت است:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R}$$

که همان معادله (۴.۳۵) است.

مثال ۲۰۵.۴. معادله خط راست l ، به این صورت، داده شده است:

$$l: x + y - z + 1 = 0, \quad x + 2y + z - 4 = 0$$

معادله پارامتری آن را پیدا کنید.

حل. از همان نمادهای مسأله قبل استفاده می کنیم:

$$\mathbf{N}_1 = (1, 1, -1), \quad D_1 = -1, \quad \mathbf{N}_2 = (1, 2, 1), \quad D_2 = 4,$$

$$D_2 \mathbf{N}_1 - D_1 \mathbf{N}_2 = (5, 6, -3),$$

$$\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3, -2, 1),$$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{9+4+1} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{14} (0, 14, 28) = (0, 1, 2)$$

در نتیجه، معادله خط راست l به این صورت است:

$$x = 0 + 3t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 2 + t$$

$$\text{و یا } \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$$

مثال ۳.۵.۴. تصویر قائم $M_*(\mathbf{r}_*)$ نقطه $M_0(\mathbf{r}_0)$ را روی خط راست

l پیدا کنید، به شرطی که خط راست l ، فصل مشترک این دو صفحه باشد:

$$P_1: (\mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1) = D_1; \quad P_2: (\mathbf{r}_2, \mathbf{N}_2) = D_2$$

حل. بردار $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ بردار هادی خط راست l است.

بنا به فرض $M_* \in l$ و $\overrightarrow{M_0 M_*} \perp \mathbf{a}$ یعنی $(\mathbf{r}_* - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0$. به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم که، از آن، شعاع حامل نقطه M_* یعنی $\mathbf{r}_*$ به دست می‌آید:

$$(\mathbf{r}_*, \mathbf{N}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}_*, \mathbf{N}_2) = D_2, \quad (\mathbf{r}_*, \mathbf{a}) = D_3$$

که در آن $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ و $D_3 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$ با توجه به دستور (۴.۲۹) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* &= \frac{D_1[\mathbf{N}_2, \mathbf{a}] + D_2[\mathbf{a}, \mathbf{N}_1] + D_3 \mathbf{a}}{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{a})} = \\ &= \frac{[(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2), D_2 \mathbf{N}_1 - D_1 \mathbf{N}_2] + (\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]}{|[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]|^2} \end{aligned}$$

مثال ۴.۵.۴. (دسته صفحه‌هایی که از خط راست مفروضی می‌گذرند).
معادله صفحه‌هایی را بنویسید که بر خط راست l ، فصل مشترك دو صفحه زیر،
می‌گذرند:

$$P_1: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) + D_1 = 0,$$

$$P_2: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) + D_2 = 0, \quad [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] \neq 0$$

حل. a ، بردار هادی خط راست l به صورت $a = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ است.
 P^* را صفحه دلخواهی می‌گیریم که از l گذشته باشد. بردار نرمال این صفحه،
 $\mathbf{N}^* \neq 0$ ، بر بردار a عمود است، یعنی با صفحه‌ای که $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ يك پایه
را در آن تشکیل می‌دهند، موازی است. بنابراین، عددهای α و β وابسته به
 $\mathbf{N}^*$ وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$\mathbf{N}^* = \alpha \mathbf{N}_1 + \beta \mathbf{N}_2, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

بنابراین، معادله P^* ، به صورت زیر است:

$$(\mathbf{r}, \alpha \mathbf{N}_1 + \beta \mathbf{N}_2) = D^*$$

عدد D^* هم به وسیله صفحه P^* معین می‌شود: می‌توان آن را بر حسب α و
 β بیان کرد. برای پیدا کردن رابطه بین α و β و D^* ، و نقطه دلخواه $M_0 \in l$
را، با شعاع حامل $\mathbf{r}_0$ در نظر می‌گیریم. چون $M_0 \in P_1$ ، پس $(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1) = -D_1$ ؛
و چون $M_0 \in P_2$ ، بنا بر این $(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_2) = -D_2$ ، سرانجام

$$D^* = (\mathbf{r}_0, \alpha \mathbf{N}_1 + \beta \mathbf{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2$$

(چون $M_0 \in P^*$). به این ترتیب، معادله هر صفحه‌ای مثل P^* که از خط راست
 l بگذرد، چنین است:

$$(\mathbf{r}, \alpha \mathbf{N}_1 + \beta \mathbf{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) + D_1\} + \beta \{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) + D_2\} = 0 \quad (4.36)$$

که در آن، α و β عددهایی هستند که با صفحه P^* مشخص می‌شوند و هر دو
با هم، برابر صفر نیستند. برعکس، اگر α و β را عددهایی دلخواه بگیریم،

به نحوی که با هم برابر صفر نباشند، آن وقت، معادله (۴.۳۶)، معادله صفحه مشخصی است که l عبور می کند. [اگر شعاع حامل نقطه دلخواه $M_0 \in l$ باشد، آن وقت

$$M_0 \in P_1: (r_0, N_1) + D_1 = 0; M_0 \in P_2: (r_0, N_2) + D_2 = 0$$

و از آن جا

$$\alpha\{(r_0, N_1) + D_1\} + \beta\{(r_0, N_2) + D_2\} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

یعنی M_0 بر صفحه ای قرار دارد که با معادله (۴.۳۶) مشخص شده است. [معادله (۴.۳۶)، معادله دسته صفحه هایی است که بر فصل مشترك دو صفحه P_1 و P_2 می گذرند. اگر معادله صفحه های P_1 و P_2 ، به صورت مختصاتی داده شده باشند:

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

آن گاه، با مشخص کردن بردارهای نرمال

$$N_1 = (A_1, B_1, C_1), N_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

به دست می آید:

$$P_1: (r, N_1) + D_1 = 0; P_2: (r, N_2) + D_2 = 0$$

در این حالت، معادله صفحه هایی که بر خط راست $l = P_1 \cap P_2$ می گذرند، به این صورت درمی آید:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad (4.37)$$

مثال ۵.۵.۴. معادله صفحه ای را بنویسید که از فصل مشترك دو صفحه

P_1 و P_2 بگذرد و بر صفحه P_3 عمود باشد، به شرطی که

$$P_1: (r, N_1) = -D_1, P_2: (r, N_2) = -D_2,$$

$$P_3: (r, N_3) = -D_3, (N_1, N_3) \neq 0$$

حل. بنا به دستور (۴.۳۶)، معادله صفحه مورد نظر به این صورت است:

$$\alpha\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) + D_2\} = 0$$

و یا

$$(\mathbf{r}, \alpha\mathbf{N}_1 + \beta\mathbf{N}_2) = -(\alpha D_1 + \beta D_2)$$

که بردار نرمال آن، به صورت $\mathbf{N} = \alpha\mathbf{N}_1 + \beta\mathbf{N}_2$ است. بنا به فرض، این بردار بر $\mathbf{N}_3$ عمود است، یعنی $\alpha(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3) + \beta(\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) = 0$ و چون، بنا به فرض $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3) \neq 0$ ، بنابراین

$$\alpha = -\frac{\beta(\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3)}{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3)}, \quad \beta \neq 0$$

اگر α و β را در معادله (۴.۳۶) قرار دهیم، بعد از اندکی ساده کردن، به دست می آید:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}, -\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_2) + \mathbf{N}_2(\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1)] &= \\ &= D_1(\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) - D_2(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3) \end{aligned}$$

و یا

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N}_3, [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]) = (D_2\mathbf{N}_1 - D_1\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3)$$

مثال ۶.۵۰۴. معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $M(-3, 1, 0)$

و فصل مشترك صفحه های

$$P_1: x + 2y + z + 4 = 0 \text{ و } P_2: 3x - y + 2z - 1 = 0$$

بگذرد.

حل. معادله صفحه مطلوب، به این صورت است $[(4.37)]$ را ببینید:

$$P: \alpha(x + 2y - z + 4) + \beta(3x - y + 2z - 1) = 0,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0$$

رابطه بین α و β از شرط $M \in P$ به دست می آید، یعنی

$$\alpha(-3+2 \times 1-0+4)+\beta(3 \times -3-1+2 \times 0-1)=0$$

که از آن جا معلوم می شود $\alpha = \frac{11}{3}\beta$ یا $3\alpha - 11\beta = 0$ که اگر در معادله

قرار دهیم، بعد از تقسیم دو طرف بر $\beta \neq 0$ به دست می آید:

$$20x + 19y - 5z + 41 = 0$$

مثال ۷۰۵۰۴. معادله صفحه ای را بنویسید که با خط راست L موازی

باشد و بر فصل مشترك صفحه های P_1 و P_2 بگذرد، به شرطی که

$$L: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-2}; P_1: x-y+2=0; P_2: y+z-4=0$$

حل. معادله صفحه مطلوب، به این صورت است:

$$\alpha(x-y+2)+\beta(y+z-4)=0 \iff$$

$$\iff \alpha x + (\beta - \alpha)y + \beta z + (2\alpha - 4\beta) = 0$$

بردار نرمال صفحه به صورت $N = (\alpha, \beta - \alpha, \beta)$ است که باید بر بردارهای

خط راست L ، یعنی $a = (-1, 3, -2)$ عمود باشد، پس $\beta = 4\alpha$ و معادله صفحه مورد نظر، چنین می شود:

$$x + 3y + 4z - 14 = 0$$

مثال ۸۰۵۰۴. معادله صفحه دلخواهی را بنویسید که بر نقطه مشترك این

سه صفحه می گذرد:

$$P_1: (r, N_1) = -D_1; P_2: (r, N_2) = -D_2; P_3: (r, N_3) = -D_3,$$

$$(N_1, N_2, N_3) \neq 0$$

حل. نقطه مشترك سه صفحه P_1, P_2, P_3 را M_0 می نامیم و شعاع

حامل آن را r_0 می گیریم. بنابراین

$$(r_0, N_1) = -D_1, (r_0, N_2) = -D_2, (r_0, N_3) = -D_3$$

اگر P^* ، یکی از صفحه‌های مورد نظر باشد، $N \neq 0$ ، بردار نرمال آن، در رابطه با بردارهای ناهم صفحه N_1, N_2 و N_3 به این صورت است:

$$N = \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3$$

(بردارهای α, β و γ ؛ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$ ، به وسیله بردار N مشخص می‌شوند، یعنی به وسیله صفحه P^*). نقطه M_0 ، تنها وقتی متعلق به صفحه P^* است که r_0 در معادله P^* ،

$$(r, \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3) + D^* = 0$$

صدق کند، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$D^* = -(r_0, \alpha N_1 + \beta N_2 + \gamma N_3) = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3$$

و معادله صفحه P^* به این صورت است:

$$\alpha \{(r, N_1) + D_1\} + \beta \{(r, N_2) + D_2\} + \gamma \{(r, N_3) + D_3\} = 0 \quad (4.38)$$

که به آن، معادله دسته صفحه‌ای می‌گویند که از نقطه مشترک صفحه‌های P_1, P_2 و P_3 گذشته است (با متغیرهای α, β و γ ؛ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$). این معادله، مجموعه صفحه‌هایی را مشخص می‌کند که از نقطه M_0 گذشته‌اند.

مثال ۹.۵.۴. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $M_1(r_1)$ و خط

راست l به معادله $[r, a] = M$ بگذرد: $a \neq 0$ و $(a, M) = 0$.

حل. معادله خط راست l را، به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$r = r_0 + at, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_0 = \frac{[a, M]}{|a|^2}$$

نقطه M با شعاع حامل r ، وقتی و تنها وقتی بر صفحه مورد نظر P قرار دارد که بردارهای $r - r_1, r_0 - r_1$ و a هم‌صفحه باشند، یعنی داشته باشیم:

$$(r - r_1, r_0 - r_1, a) = 0$$

اگر توجه کنیم که $[r_0 - r_1, a] = M - [r_1, a]$ ، آن وقت، به معادله صفحه

P می‌رسیم:

$$P: (r, N) = D, N = M - [r, a], D = (r, N) = (r, M)$$

مثال ۱۰۰۵۰۴. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $M_0(r_0)$ و فصل

مشترك دو صفحه $P_1: (r, N_1) + D_1 = 0$ و $P_2: (r, N_2) + D_2 = 0$ می‌گذرد، به شرطی که $[N_1, N_2] \neq 0$ و $M_0 \notin P_1$.

حل. معادله صفحه مطلوب P [۴.۳۶] را بیابید، به این صورت است:

$$\alpha \{(r, N_1) + D_1\} + \beta \{(r, N_2) + D_2\} = 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

عددهای α و β در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\alpha \{(r_0, N_1) + D_1\} + \beta \{(r_0, N_2) + D_2\} = 0,$$

$$\{(r_0, N_1) + D_1\} \neq 0$$

از این شرط α را به دست می‌آوریم و در معادله صفحه P قرار می‌دهیم، اگر

دو طرف معادله را بر $-\frac{\beta}{\{(r_0, N_1) + D_1\}} \neq 0$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\{(r_0, N_2) + D_2\} \{(r, N_1) + D_1\} -$$

$$- \{(r_0, N_1) + D_1\} \{(r, N_2) + D_2\} = 0$$

مثال ۱۱۰۵۰۴. خط راست $l: [r, a] = M$ ، $a \neq 0$ ، $(a, M) = 0$

و صفحه P به معادله $(r, N) = D$ ، $N \neq 0$ مفروض‌اند. با چه شرطی:

l و P تنها در يك نقطه مشترك‌اند؟ $(b) \ l \cap P = \emptyset$ ؛ $(c) \ l \subset P$ ؟

حل. (a) معادله خط راست l را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$r = r_0 + at, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_0 = \frac{[a, M]}{|a|^2}$$

خط راست l ، تنها وقتی با صفحه P در يك نقطه مشترك است که معادله

$$(r_0 + at, N) = D \iff t(a, N) = D - (r_0, N) \quad (4.39)$$

دارای جوابی منحصر به فرد برای t باشد؛ و این، تنها وقتی ممکن است که $(a, N) \neq 0$. در این حالت

$$t = \frac{D - (r_0, N)}{(a, N)} = \frac{Da^\vee - (a, M, N)}{a^\vee(a, N)}$$

و r ، شعاع حامل نقطهٔ مشترك از دستور زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} r &= r_0 + a \frac{D - (r_0, N)}{(a, N)} = \frac{Da + r_0(N, a) - a(N, r_0)}{(a, N)} = \\ &= \frac{Da + [N, (r_0, a)]}{(a, N)} = \frac{Da + [N, M]}{(a, N)} \quad (4.40) \end{aligned}$$

(b) اگر $(a, N) = 0$ و $D \neq \frac{(a, M, N)}{|a|^2}$ ، آن وقت معادلهٔ (۴.۳۹)

به این صورت درمی‌آید:

$$t \cdot 0 = D - \frac{(a, M, N)}{|a|^2}$$

که جواب ندارد؛ یعنی خط راست l و صفحهٔ P ، دارای نقطهٔ مشترك نیستند.

(c) اگر $(a, N) = 0$ و $D|a|^2 = (a, M, N)$ ، آن وقت معادلهٔ

(۴.۳۹) به صورت $t \cdot 0 = 0$ درمی‌آید که هر مقدار t در آن صدق می‌کند.

بنابراین، هر نقطهٔ خط راست l بر صفحهٔ P قرار دارد، یعنی $l \subset P$.

مثال ۱۲.۵۰۴. تصویر قائم $M_*(r_0)$ از نقطهٔ $M_*(r_1)$ را بر خط راست

l پیدا کنید، به شرطی که

$$l: [r, a] = M, \quad a \neq 0, \quad (a, M) = 0$$

حل. بنا به فرض $M_* \in l$ ، یعنی $[r, a] = M$ و $\overrightarrow{M_* M_*} \perp a$ یا

$(r_0, a) = (r_1, a)$. بنابراین مسأله به این جا منجر می‌شود که، شعاع حامل

r_* مربوط به نقطهٔ مشترك خط راست l و صفحهٔ

$$P: (r, N) = D, \quad N = a, \quad D = (r_1, a)$$

را پیدا کنیم. بنابر دستور (۴.۴۰) داریم:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{a} + [\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

مثال ۱۳.۵.۴. معادله خط راستی را بنویسید که از نقطه $M_1(\mathbf{r}_1)$ و خط راست l را به طور عمودی قطع کند، به شرطی که

$$l: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_l) = D_l (l=1, 2), [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] \neq 0$$

حل. $M_0(\mathbf{r}_0)$ را پای عمود وارد از نقطه M_1 بر خط راست l می گیریم. از شرط های $M_0 \in l$ و $(M_1, M_0) \perp l$ به دست می آید: $(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}) = 0$ که در آن، $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ بردار هادی خط راست l است. داریم:

$(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1) = D_1, (\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_2) = D_2, (\mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = D_3, D_3 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$
دستگاه معادله هایی از نوع (۴.۲۸) به دست می آید که، جواب آن $[(4.29)]$ را ببینید، چنین است:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{[(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2), D_2 \mathbf{N}_1 - D_1 \mathbf{N}_2] + (\mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]}{|[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]|^2}$$

و معادله عمود عبارت است از:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

مثال ۱۴.۵.۴. صفحه های $P_1: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) = D_1$ و $P_2: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) = D_2$ صفحه های $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) \neq 0$ مفروض اند. معادله صفحه P را بنویسید که از خط راست l فصل مشترك صفحه های P_1 و P_2 و نقطه $M_1(\mathbf{r}_1)$ بگذرد.

حل. بردار $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ بردار هادی خط راست l بردار نرمال صفحه مطلوب است، بنابراین $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = D$ عدد D از شرط های $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = D$ و $M_1 \in P$ به دست می آید. معادله صفحه P ، چنین است:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = 0$$

مثال ۱۵.۵.۴. معادله خط راستی را بنویسید که بر صفحه $P: (r, N) = D$, $N \neq 0$ واقع باشد و خط راست $l: r = r_0 + at$ را به زاویه قائمه قطع کند، $(a, N) \neq 0$ و $[a, N] \neq 0$.
حل. M_0 را نقطه مشترک صفحه P و خط راست l فرض می‌کنیم. r_0 شعاع حامل این نقطه، از رابطه‌های

$$r_0 = r_0 + at, (r_0 + at, N) = D$$

به دست می‌آید، یعنی

$$r_0 = r_0 + a \frac{D - (r_0, N)}{(a, N)}$$

خط راست مورد نظر، باید از این نقطه بگذرد. چون خط راست مطلوب L ، در صفحه P قرار دارد، بردار هادی b از خط راست L ، بر N عمود است و، همچنین، بنا به فرض $b \perp a$. در نتیجه، می‌توانیم بردار $b = [a, N]$ را، به عنوان بردار هادی خط راست L در نظر بگیریم. به این ترتیب، معادله خط راست L ، به این صورت درمی‌آید:

$$r = \left(r_0 + \frac{D - (r_0, N)}{(a, N)} a \right) + [a, N]t, t \in \mathbb{R}$$

مثال ۱۶.۵.۴. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از خط راست l بگذرد و بر صفحه P عمود باشد. معادله‌های l و P چنین‌اند:

$$l: r = r_0 + at, P: (r, N) = D, [a, N] \neq 0$$

حل. نقطه $M_0(r_0)$ و یکی از بردارهای هادی صفحه مورد نظر (بردار a) معلوم‌اند. به عنوان بردار هادی دوم می‌توانیم، مثلاً، N را در نظر بگیریم، زیرا بنا به فرض، صفحه مورد نظر بر صفحه P عمود است و، بنابراین، با بردار نرمال N موازی است. بردارهای a و N هم‌راستا نیستند و صفحه مطلوب، موازی با آن‌هاست. بنابراین، بردار $N^* = [a, N]$ را می‌توان، به عنوان بردار نرمال صفحه مطلوب در نظر گرفت. معادله صفحه مورد نظر،

به این صورت است:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{N}) = 0$$

مثال ۱۷.۵۰۴. مطلوب است

فاصله نقطه $M_1(\mathbf{r}_1)$ از خط راست l

به معادله $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$

حل. فاصله مطلوب h ، عبارت

است از طول ارتفاع متوازی الاضلاعی

که روی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$

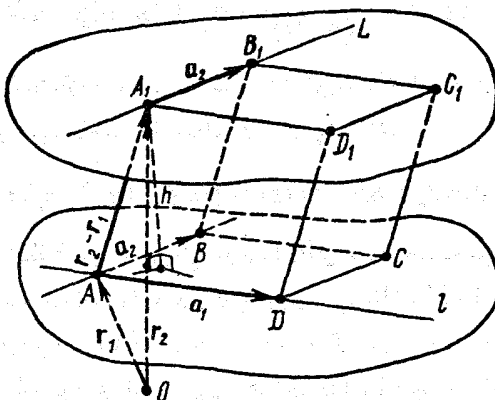
ساخته شده باشد (شکل ۲۱.۴).

بنابراین

$$h = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$$

مثال ۱۸.۵۰۴. مطلوب است فاصله بین دو خط متنافر

$$l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad L: \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 \tau$$



حل. فاصله مورد نظر h ، برابر است با طول عمود مشترك دو خط راست l و L ، یعنی فاصله بین دو صفحه موازی که یکی از آنها شامل l و دیگری شامل L باشد. به این ترتیب، h برابر است با طول ارتفاع متوازی السطوح $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (شکل ۲۲.۴) که روی بردارهای $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ و $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ ساخته شده است:

$$h = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}$$

فصل پنجم

عددهای مختلط

بخش ۱.۵. عددهای مختلط و عمل روی آنها

مجموعه C را در نظر می گیریم که، عضوهای آن، زوج های مرتب ممکن (a, b) از عددهای حقیقی a و b هستند. اندیشه برای برابری عضوهای این مجموعه و عمل های حسابی مربوط به عضوهای مجموعه را، به این ترتیب، تعریف می کنیم.

z_1 را زوج مرتب (a_1, b_1) و z_2 را زوج مرتب (a_2, b_2) می گیریم. دو زوج مرتب z_1 و z_2 را برابر گویند (و می نویسند $z_1 = z_2$)، وقتی و تنها وقتی که داشته باشیم: $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$. به زبان دیگر، تنها وقتی $z_1 = z_2$ که z_1 و z_2 ، زوج های مرتب یکسانی از عددهای حقیقی را تشکیل دهند: مجموع z_1 و z_2 ، از زوج های مرتب (a_1, b_1) و (a_2, b_2) و $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$ با زوج مرتب $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ ، و حاصل ضرب $z_1 z_2$ آن ها، با زوج مرتب $(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$ تعریف می شود. مثلاً، اگر داشته باشیم: $z_1 = (1, 2)$ و $z_2 = (5, -3)$ ، آن وقت

$$z_1 + z_2 = (1 + 5, 2 + (-3)) = (6, -1)$$

$$z_1 z_2 = (1 \times 5 - 2(-3), 1(-3) + 2 \times 5) = (11, 7)$$

تفاضل $z_1 - z_2$ از دو زوج مرتب z_1 و z_2 را، با زوج مرتب $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$ تعریف می کنند و، سرانجام، با شرط $a_1^2 + b_1^2 > 0$

نسبت $\frac{z_1}{z_2}$ را، برای دو زوج مرتب z_1 و z_2 ، با زوج مرتب زیر تعریف می کنند:

$$\left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_1^2 + b_1^2} \right)$$

مثلاً، اگر داشته باشیم: $z_1 = (0, 5)$ و $z_2 = (1, -2)$ ، آن وقت

$$z_1 - z_2 = (0 - 1, 5 - (-2)) = (-1, 7),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(0, 5)}{(1, -2)} = \left(\frac{0 \times 1 + 5(-2)}{1^2 + (-2)^2}, \frac{-0(-2) + 5 \times 1}{1^2 + (-2)^2} \right) = (-2, 1)$$

مجموعه C از زوج‌های مرتب $z = (a, b)$ از عددهای حقیقی a و b را، که اندیشهٔ برابری و عمل‌های حسابی را درمورد آن‌ها تعریف کردیم، مجموعهٔ عددهای مختلط می‌نامند. هر عضو $z = (a, b) \in C$ ، يك عدد مختلط است.

عدد مختلط $(a, 0)$ را، که در آن $a \in \mathbf{R}$ و تنها معرف عدد حقیقی a است، با همان حرف a نشان می‌دهند، یعنی $(a, 0) = a \in \mathbf{R}$. برای چنین عددهائی، عمل‌های روی عددهای حقیقی، متناظر با عمل‌های روی عددهای مختلط می‌شود:

$$(a_1, 0) \pm (a_2, 0) = (a_1 \pm a_2, 0) = a_1 \pm a_2,$$

$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2 - 0, a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2) = (a_1 a_2, 0) = a_1 a_2,$$

$$\frac{(a_1, 0)}{(a_2, 0)} = \left(\frac{a_1 a_2 + 0}{a_2^2 + 0^2}, \frac{-a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2}{a_2^2 + 0^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2}, 0 \right) = \frac{a_1}{a_2} (a_2 \neq 0)$$

عدد مختلط $(0, 1)$ را، واحد موهومی گویند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$i = (0, 1)$$

عدد مختلط $(0, 0)$ را صفر گویند.

عضوهای مجموعه C را، اغلب، به طور ساده، عدد گویند (اگر روشن باشد که، عددهای مختلط، معنی دارند).

نتیجه عمل‌های مربوط به جمع و تفریق عددهای مختلط z_1 و z_2 را، مجموع و تفاضل عددهای z_1 و z_2 می‌نامند و، به همین ترتیب، نتیجه عمل‌های ضرب و تقسیم دو عدد مختلط z_1 و z_2 را، حاصل ضرب و خارج قسمت آن‌ها گویند. تقسیم عدد مختلط z ، بر عدد مختلط o ، معین نیست. حاصل ضرب عددهای مختلط z_1 و z_2 را به صورت $z_1 \cdot z_2$ نشان می‌دهند. برای هر عدد طبیعی n ، توان n ام عدد مختلط z ، یعنی z^n را، می‌توان با روش استقرا و بر اساس $z^1 = z$ ، $z^1 = z$ ، $z^n = z \cdot z^{n-1}$ ، $n \geq 2$ پیدا کرد.

اگر $z = (a, b)$ عددی مختلط باشد، عدد $(-a, -b)$ را متقابل عدد مختلط z گویند و با نماد $-z$ نشان می‌دهند. عدد مختلط $(a, -b)$ ، مزدوج عدد مختلط z نامیده می‌شود و نماد آن $\bar{z}$ است. عدد غیر منفی $\sqrt{a^2 + b^2}$ را قدر مطلق عدد مختلط $z = (a, b)$ گویند و با نماد $|z|$ نشان می‌دهند. قدر مطلق را کالبد و مدول هم گفته‌اند. به این ترتیب:

$$z = (a, b) \Rightarrow -z = (-a, -b), \bar{z} = (a, -b),$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

اگر $z = (a, 0) = a \in \mathbb{R}$ ، آن گاه $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ ، یعنی قدر مطلق عدد مختلطی که با عدد حقیقی a بیان شده باشد، برابر است با قدر مطلق عدد حقیقی a .

مثال ۱۰۱.۵ ثابت کنید: اگر $z = -z$ ، آن گاه $z = 0$ ؛ و اگر $z = \bar{z}$ ، آن گاه $z \in \mathbb{R}$.

حل. فرض می‌کنیم: $z = (a, b)$ و $z = -z$. در این صورت

$$(a, b) = (-a, -b)$$

و بنا به تعریف برابری دو عدد مختلط: $a = -a$ و $b = -b$ که، از آن جا، به دست می‌آید: $a = b = 0$ و $z = (a, b) = (0, 0) = 0$.

برای حالت $z = \bar{z}$ بایست داشته باشیم: $(a, b) = (a, -b)$ ، یعنی

$b = 0$ و $b = -b$. بنابراین $z = (a, b) = (a, 0) = a \in \mathbf{R}$.
 مثال ۲۰۱۰۵. ثابت کنید، برای هر دو عدد حقیقی c و d ($d \neq 0$) و هر عدد مختلط $z = (a, b)$ داریم:

$$cz = (ca, cb), \quad \frac{z}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) \quad (5.1)$$

[عددهای c و d در سمت راست برابری‌های بالا، به عنوان عددهای حقیقی، و در سمت چپ، به عنوان عددهای مختلط $(c, 0)$ و $(d, 0)$ در نظر گرفته می‌شوند.]

حل. داریم:

$$c \cdot z = (c, 0)(a, b) = (ca - 0 \cdot b, cb + 0 \cdot a) = (ca, cb),$$

$$\frac{z}{d} = \frac{(a, b)}{(d, 0)} = \left(\frac{ad + b \cdot 0}{d^2 + 0^2}, \frac{-a \cdot 0 + bd}{d^2 + 0^2} \right) = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right)$$

از دستور (۵.۱) در حالت خاص می‌توان نتیجه گرفت:

$$1 \cdot z = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) = z,$$

$$(-1) \cdot z = [(-1) \cdot a, (-1) \cdot b] = (-a, -b) = -z,$$

$$\frac{z}{1} = \left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1} \right) = (a, b) = z,$$

$$\frac{z}{-1} = \left(\frac{a}{-1}, \frac{b}{-1} \right) = (-a, -b) = -z \quad (5.2)$$

مثال ۳۰۱۰۵. برای عددهای مختلط $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$ ، رابطه‌های زیر برقرارند (از این جا به بعد، عمل‌های داخل پرانتزها، حق تقدم دارند):

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2); \quad (5.3)$$

$$z_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} \quad (5.4)$$

حل. داریم:

$$\begin{aligned}
 z_1 + (-z_2) &= (a_1, b_1) + (-a_2, -b_2) = \\
 &= [a_1 + (-a_2), b_1 + (-b_2)] = (a_1 - a_2, b_1 - b_2) = z_1 - z_2; \\
 \frac{1}{z_2} &= \frac{(1, 0)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{1 \cdot a_2 + 0 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-1 \cdot b_2 + 0 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2} \right)$$

از طرف دیگر، با توجه به دستور (۵.۱):

$$\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_2, -b_2)}{|z_2|^2} = \left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2} \right) = \frac{1}{z_2}$$

به همین ترتیب

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} &= \frac{(a_1, b_1) \cdot (a_2, -b_2)}{|z_2|^2} = \\
 &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|z_2|^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{|z_2|^2} \right) = \\
 &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) = \frac{z_1}{z_2}
 \end{aligned}$$

مثال ۴.۱۰۵. ثابت کنید، برای هر عدد مختلط $z = (a, b)$ داریم:

$$z = a + bi \quad (5.5)$$

برعکس، اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و $z = a + bi$ ، آن گاه $z = (a, b)$.

حل. اگر $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ ، بنا بر دستور (۵.۱) داریم:

$$bi = b \cdot (0, 1) = (b \cdot 0, b \cdot 1) = (0, b)$$

و بنابراین

$$a+bi=(a, 0)+(0, b)=(a+0, 0+b)=(a, b)$$

نماد به صورت (۵.۵) را، برای عددمختلط $z=(a, b)$ ، صورت جبری
نماد عدد z گویند. در نماد جبری (۵.۵)، برای عددمختلط z ، عددهای $a \in \mathbb{R}$
و $b \in \mathbb{R}$ ، نام‌های ویژه‌ای دارند: a را بخش حقیقی عدد z گویند و می‌نویسند
 $a = \operatorname{Re} z$ ؛ b بخش موهومی عدد z است و می‌نویسند $b = \operatorname{Im} z$. به سادگی
قابل تحقیق است که:

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2$$

$$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2$$

اگر $\operatorname{Im} z = 0$ ، آن وقت $z = a + 0 \times i = (a, 0)$ همان عدد حقیقی a است.
عدد مختلط $z = (0, b) = 0 + bi = bi$ را (که بخش حقیقی آن برابر صفر
است)، عدد موهومی خالص گویند. عدد $0 = 0 + 0i$ را، می‌توان حقیقی یا موهومی
خالص به حساب آورد. در ضمن روشن است که اگر $z = a + bi$ ، آن گاه
 $\bar{z} = a - bi$.

مثال ۵.۱۰۵. ثابت کنید:

$$i^2 = -1 \quad (5.6)$$

حل. داریم:

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \\ &= (-1, 0) = -1 \end{aligned}$$

در بخش ۵.۲، از نماد $c = (a, b)$ ، برای نشان دادن بردار c استفاده
کردیم؛ این بردار با صفحه‌ای مثل P موازی بود و اگر پایه $\{e_1, e_2\}$ زادر
صفحه P در نظر می‌گرفتیم، a و b ، مختصات بردار c را نشان می‌داد:

$$c = ae_1 + be_2$$

مطابقت نماد $c = (a, b)$ (برای نشان دادن بردار c در صفحه P) با
نماد $z = (a, b)$ (برای نشان دادن عددهای مختلط)، تصادفی نیست. در

بخش‌های ۴.۵ و ۵.۵، به تفصیل دربارهٔ ارتباط بین بردارها و عددهای مختلط، صحبت خواهیم کرد.

بخش ۴.۵. ویژگی‌های عمل‌ها روی عددهای مختلط

قانون‌های جمع و تفریق

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad I_1 \quad (\text{جاب‌جایی در عمل جمع}).$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad II_1 \quad (\text{شرکت‌پذیری در عمل جمع}).$$

عمل جمع.

$$z + 0 = z \quad III_1$$

$$z + (-z) = 0 \quad IV_1$$

$$z = z_1 - z_2 \iff z + z_2 = z_1 \iff z = z_1 + (-z_2) \quad V_1$$

قانون‌های ضرب و تقسیم

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad I_2 \quad (\text{جاب‌جایی در عمل ضرب}).$$

$$(z_1 z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 z_3) \quad II_2 \quad (\text{شرکت‌پذیری در عمل ضرب}).$$

$$\frac{z}{-1} = -z, \frac{z}{1} = z, 0 \cdot z = 0, (-1) \cdot z = -z, 1 \cdot z = z \quad III_2$$

$$0 \cdot z \neq 0 \implies z \cdot \left(\frac{1}{z}\right) = 1 \quad IV_2 \quad \text{برای } z \neq 0$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left(z = \frac{z_1}{z_2} \iff z \cdot z_2 = z_1 \iff z = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right) \quad V_2$$

رابطه‌های I_1 تا V_1 و I_2 تا V_2 را می‌توان، به سادگی و با تکیه بر تعریف‌های قبلی ثابت کرد. ویژگی II_1 (یا II_2) به ما امکان می‌دهد که، ضمن جمع (ضرب) سه جمله یا بیشتر، پرانتزها را حذف کنیم. ویژگی V_1 به این معناست که، تفریق، عکس عمل جمع است و، شبیه آن، V_2 به معنای آن است که، تقسیم، عکس عمل ضرب است.

به خواننده سفارش می‌کنیم که سیاههٔ این ویژگی‌ها را با قانون‌های جمع بردارها (بخش ۲.۲) مقایسه کند و، به طور مستقل، قاعدهٔ مربوط

به حذف پرانتزها را ثابت کند:

$$(z_1 - z_2) + (z_3 - z_4) + \dots + (z_{2n-1} - z_{2n}) = \\ = (z_1 + z_3 + \dots + z_{2n-1}) - (z_2 + z_4 + \dots + z_{2n}); \quad (5.7)$$

$$z_2 \neq 0, \dots, z_{2n} \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right) \left(\frac{z_3}{z_4}\right) \times \dots \times \left(\frac{z_{2n-1}}{z_{2n}}\right) = \\ = \frac{(z_1 \cdot z_3 \times \dots \times z_{2n-1})}{(z_2 \cdot z_4 \times \dots \times z_{2n})}$$

مثال ۵.۲.۱ ویژگی V_2 را ثابت کنید.

حل. فرض می‌کنیم: $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2) \neq 0$ و $z = (a, b)$

اگر $z = \frac{z_1}{z_2}$ ، آن‌گاه بنا به تعریف نسبت داریم:

$$a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad b = \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

بنا بر این

$$z \cdot z_2 = (aa_2 - bb_2, ab_2 + ba_2) = \\ = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot a_2 - \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot b_2, \right.$$

$$\left. \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot b_2 + \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot a_2 \right) = (a_1, b_1) = z_1 \right.$$

برعکس، اگر $z_1 = z \cdot z_2$ ، آن‌گاه بنا به تعریف ضرب

$$a_1 = aa_2 - bb_2, \quad b_1 = ab_2 + ba_2$$

در نتیجه

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{(aa_2 - bb_2)a_1 + (ab_2 + ba_1)b_1}{a_1^2 + b_1^2}, \right. \\ \left. \frac{-(aa_2 - bb_2)b_1 + (ab_2 + ba_1)a_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) = \\ = (a, b) = z$$

در ضمن، اگر $z_1 = z \cdot z_2$ ، آن گاه بنا بر II_2, IV_2, I_2 و III_2 داریم

$$z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (z \cdot z_2) \cdot \frac{1}{z_2} = z \cdot \left(z_2 \cdot \frac{1}{z_2} \right) = z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

برعکس، اگر $z = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ ، آن گاه

$$z \cdot z_2 = \left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right) \cdot z_2 = z_1 \cdot \left(\frac{1}{z_2} \cdot z_2 \right) = \\ = z_1 \cdot \left(z_2 \cdot \frac{1}{z_2} \right) = z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$$

قانون‌های توزیع پذیری (پخش‌ی)

$$z \cdot (z_1 \pm z_2) = (z_1 \pm z_2) \cdot z = z \cdot z_1 \pm z \cdot z_2 \quad VI$$

$$z \neq 0 \Rightarrow \frac{z_1 \pm z_2}{z} = \frac{z_1}{z} \pm \frac{z_2}{z}$$

(در حالتی که، ضمن نوشتن عبارت‌ها، از پراگتزاز استفاده نشود، همیشه، عمل‌های ضرب و تقسیم را باید قبل از عمل‌های جمع و تفریق انجام داد).
□ فرض کنید: $z = (a, b)$ ، $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$ در این صورت داریم:

$$z \cdot z_1 = (aa_1 - bb_1, ab_1 + ba_1),$$

$$z \cdot z_2 = (aa_2 - bb_2, ab_2 + ba_2), \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2),$$

$$z \cdot (z_1 - z_2) = (a, b) \cdot (a_1 - a_2, b_1 - b_2) =$$

$$\begin{aligned}
 &= [a(a_1 - a_2) - b(b_1 - b_2), a(b_1 - b_2) + b(a_1 - a_2)] = \\
 &= [aa_1 - bb_1 - (aa_2 - bb_2), ab_1 + ba_1 - (ab_2 + ba_2)] = \\
 &= (aa_1 - bb_1, ab_1 + ba_1) - (aa_2 - bb_2, ab_2 + ba_2) = \\
 &= z \cdot z_1 - z \cdot z_2
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب، می توان به دست آورد:

$$z \cdot (z_1 + z_2) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2$$

بنابر ویژگی V_2 و برابری هایی که هم اکنون ثابت کردیم:

$$\frac{z_1 \pm z_2}{z} = (z_1 \pm z_2) \cdot \frac{1}{z} = z_1 \cdot \frac{1}{z} \pm z_2 \cdot \frac{1}{z} = \frac{z_1}{z} \pm \frac{z_2}{z} \blacksquare$$

قانون های ساده کردن

$$z_1 + z = z_2 + z \iff z_1 = z_2 \quad \text{VII}$$

$$z \neq 0, z_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{z_1 \cdot z}{z_2 \cdot z} = \frac{z \cdot z_1}{z \cdot z_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

□ با توجه به (۵.۷) داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1 \cdot z}{z_2 \cdot z} &= \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \cdot \left(\frac{z}{z} \right) = \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{z_1}{z_2} \right) \cdot \left(\frac{z}{z} \right) = \\
 &= 1 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{z_1}{z_2} \blacksquare
 \end{aligned}$$

از قاعده بالا، می توان به خصوص به این نتیجه رسید که اگر

$$z_j \neq 0, (j=1, 2), \text{ آن گاه}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{1 \cdot z_2}{\left(\frac{z_1}{z_2} \right) \cdot z_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

از تعریف جمع و تفریق عددهای مختلط، می توان نتیجه گرفت که، اگر

دو عدد مختلط $z_1 = a_1 + b_1 i$ و $z_2 = a_2 + b_2 i$ را به صورت جبری در نظر بگیریم، برای این که مجموع یا تفاضل آن ها را به دست آوریم، کافی است، این دو عدد را، به عنوان چند جمله ای های درجه اول از متغیر i و ضرایب های

حقیقی به حساب آوریم و جمله‌های مشابه را باهم جمع و یا ازهم کم کنیم:

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

مثال ۲۰۲۰۵. ثابت کنید، برای ضرب عددهای مختلط $z_1 = a_1 + b_1 i$

و $z_2 = a_2 + b_2 i$ (که به صورت جبری نوشته شده‌اند)، می‌توان آن‌ها را، به عنوان ضرب دو چندجمله‌ای درجه اول با متغیر i و ضریب‌های حقیقی در نظر گرفت. در ضمن، به یاد داشته باشیم که، بنابر (۵.۶)، می‌توان i^2 را برابر -1 گرفت.

حل. با توجه به قانون‌های ضرب و برابری (۵.۶) داریم:

$$\begin{aligned} (b_1 i) \cdot (b_2 i) &= (b_1 i) \cdot (i b_2) = \\ &= b_1 \cdot [i \cdot (i b_2)] = b_1 \cdot [(ii) \cdot b_2] = b_1 \cdot (b_2 i^2) = (b_1 b_2) \cdot i^2 = \\ &= (b_1 b_2)(-1) = (-1) \cdot (b_1 b_2) = -(b_1 b_2) \end{aligned}$$

علاوه بر آن: $(b_1 i) \cdot a_2 = a_2 \cdot (b_1 i) = (a_2 b_1) \cdot i$. بنا بر این، با توجه به قانون پخشی، داریم:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot (a_2 + b_2 i) + (b_1 i)(a_2 + b_2 i) = \\ &= a_1 a_2 + a_1 \cdot (b_2 i) + (b_1 i) \cdot a_2 + (b_1 i)(b_2 i) = \\ &= a_1 a_2 + (a_1 b_2) \cdot i + (a_2 b_1) \cdot i + (b_1 b_2) \cdot i^2 = \\ &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i + b_1 b_2 i^2 \quad (5.8) \end{aligned}$$

رابطه (۵.۸) نشان می‌دهد که، ضرب عددهای مختلط را، می‌توان به صورت ضرب چندجمله‌ای‌ها انجام داد. سرانجام

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i + (-b_1 b_2) = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{aligned}$$

که متناظر است با تعریف ضرب عددهای مختلط.

مثال ۳۰۲۰۵. دستوری برای نسبت دو عدد مختلط $z_1 = a_1 + b_1 i$ و

$z_2 = a_2 + b_2 i$ ، به صورت جبری، بنویسید.

حل. با توجه به نتیجه مسئله ۲۰۲۰۵ داریم:

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot (a_2 - b_2 i) = (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i) =$$

$$= a_1 a_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i - b_1 b_2 i^2 =$$

$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + (-a_1 b_2 + b_1 a_2) i,$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = (a_2 + b_2 i) \cdot (a_2 - b_2 i) =$$

$$= a_2 a_2 + (b_2 a_2 - a_2 b_2) i - b_2^2 i^2 = a_2^2 + b_2^2$$

بنابراین، با توجه به قانون‌های ساده کردن، به دست می‌آید:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (-a_1 b_2 + b_1 a_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$$

از خواننده می‌خواهیم، ملاحظه‌هایی را که در این جا آورده‌ایم، با

(۵.۴) مقایسه کند.

مثال ۴۰۲۰۵. این عبارت را ساده کنید:

$$A = \frac{1-i}{1+i} - (2-4i)(1+5i) + \frac{1}{i}$$

حل. داریم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} - (2-4i+10i-20i^2) + \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \\ &= \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} - (22+6i) - \frac{i}{1} = -\frac{2i}{2} - 22 - 7i = -22 - 8i \end{aligned}$$

برای هر دو عدد مختلط $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$ ، داریم:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$$

$$z_2 \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (5.9)$$

در اینجا، تنها برابری آخر را ثابت می‌کنیم و اثبات دوبرابری اول را، به خواننده وامی‌گذاریم. با توجه به تعریف نسبت داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} \right)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \right) &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) = \\ &= \left(\frac{a_1 a_2 + (-b_1)(-b_2)}{a_2^2 + (-b_2)^2}, \frac{-a_1(-b_2) + (-b_1)a_2}{a_2^2 + (-b_2)^2} \right) \end{aligned}$$

از طرف دیگر $\overline{z_1} = (a_1, -b_1)$ و $\overline{z_2} = (a_2, -b_2)$ بنابراین

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \left(\frac{a_1 a_2 + (-b_1)(-b_2)}{a_2^2 + (-b_2)^2}, \frac{-a_1(-b_2) + (-b_1)a_2}{a_2^2 + (-b_2)^2} \right) = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \right)$$

مثال ۵.۲.۵. برای هر دو عدد مختلط $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$

داریم:

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$z_2 \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (5.10)$$

حل. طبق تعریف عدد مختلط داریم:

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2 =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 \pm 2a_1 a_2 + b_1^2 + b_2^2 \pm 2b_1 b_2 =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\gamma$$

که در آن $\gamma = |a_1 a_2 + b_1 b_2|$ را، قدرمطلق عدد حقیقی $a_1 a_2 + b_1 b_2$ گرفته‌ایم. با توجه به اتحاد (۲.۱۱)،

$$\gamma = \sqrt{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right|^2} \leq \\ \leq \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = |z_1| \cdot |z_2|$$

در نتیجه

$$|z_1 \pm z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ \text{و بنابراین } |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

سپس $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ ، یعنی

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = \\ = a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 = \\ = a_1^2 (a_2^2 + b_2^2) + b_1^2 (b_2^2 + a_2^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

به این ترتیب

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (۵.۱۱)$$

بنابر V_2 داریم: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \cdot z_2 = z_1$. بنا براین، با توجه به (۵.۱۱)

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2| = |z_1| \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

بخش ۳.۵. عددهای مختلط به صورت

مثلثاتی و نمائی

$z = (a, b)$ را عدد مختلطی مخالف صفر می‌گیریم و قدرمطلق آن را با r نشان

می‌دهیم: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. پس $r > 0$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1 \quad (5.12)$$

این برابری به معنای آن است که، عدد حقیقی φ وجود دارد، به نحوی که

$$\begin{cases} \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \\ \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi \end{cases} \quad (5.13)$$

عدد حقیقی φ را، آرگومان (یا آوند) عدد مختلط z گویند.

مجموعه همه جواب‌های دستگاه معادله‌های (۵.۱۳)، یعنی مجموعه همه آرگومان‌های عدد مختلط z را با $\text{Arg } z$ نشان می‌دهند. روشن است که برای جواب‌های φ ، می‌توان کمترین مقدار مثبت φ_0 را پیدا کرد، به نحوی که با شرط $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ سازگار باشد. این جواب به کمک دستور زیر به دست می‌آید:

$$\varphi_0 = \begin{cases} 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & (b < 0) \\ \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & (b \geq 0) \end{cases} \quad (5.14)$$

φ_0 را مقدار اصلی آرگومان عدد مختلط z گویند و با $\arg z$ نشان می‌دهند. دستور زیر همیشه برقرار است:

$$\text{Arg } z = \{\varphi : \varphi = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \quad (5.15)$$

($\mathbb{Z}$ به معنای مجموعه عددهای درست است).

□ اگر $\varphi_0 = \arg z$ ، $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$ و $k \in \mathbb{Z}$ باشد، آن وقت، داریم:

$$r \cos \varphi = r \cos(\varphi_0 + 2\pi k) = r \cos \varphi_0 = a,$$

$$r \sin \varphi = r \sin(\varphi_0 + 2\pi k) = r \sin \varphi_0 = b$$

یعنی $\varphi \in \text{Arg } z$ ، برعکس، اگر $\varphi \in \text{Arg } z$ بنا بر (۵.۱۳):

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} = \cos \varphi_0, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r} = \sin \varphi_0$$

بنا بر این

$$0 = (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 + (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 = 2[1 - \cos(\varphi - \varphi_0)]$$

و از آن جا $\cos(\varphi - \varphi_0) = 1$ ، یعنی $k \in \mathbb{Z}, \varphi - \varphi_0 = 2\pi k$ از معادله‌های (۵.۱۳) به دست می‌آید:

$$z = a + bi = r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

وقتی که عدد مختلط $z \neq 0$ را، به صورت

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r \in \mathbb{R}, r > 0, \varphi \in \mathbb{R} \quad (5.16)$$

بنویسیم، آن را شکل مثلثاتی عدد مختلط z گویند. برای عدد مختلط $z = 0$ ، هم آرگومان و هم شکل مثلثاتی آن، نامعین است.
مثال ۵.۱۰۳.۵ از رابطه (۵.۱۶) نتیجه می‌شود:

$$r = |z|, \quad \varphi \in \text{Arg } z$$

حل. چون r ، $\cos \varphi$ و $\sin \varphi$ ، عددهای حقیقی‌اند، بنا به نتیجه مثال ۴.۱۰۵، از (۵.۱۶) نتیجه می‌شود:

$$|z| = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = r$$

اکنون، اگر فرض کنیم: $a = r \cos \varphi$ و $b = r \sin \varphi$ ، به دست می‌آید:

$$z = (a, b), \quad \frac{a}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{r} = \sin \varphi$$

و بنا بر این $\varphi \in \text{Arg } z$.

از حل این مثال، به‌خصوص نتیجه می‌شود که، اگر $t > 0$ عددی حقیقی

باشد، آن گاه $\arg(tz) = \arg z$ ، $|tz| = t|z|$ ، اگر $t < 0$ و $t \in \mathbf{R}$ ، آن وقت از معادله‌های

$$\begin{aligned} tz &= (-1)|t|.z = -|t|r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ &= |t|r[\cos(\varphi \pm \pi) + i\sin(\varphi \pm \pi)] \end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت که، در حالت $0 \leq \arg z < \pi$ داریم:

$$|tz| = |t|.|z|, \arg(tz) = \arg z \pm \pi$$

و در حالت $\pi \leq \arg z < 2\pi$:

$$\arg(tz) = \arg z - \pi$$

در آنالیز ریاضی، برای هر عدد مختلط z ، عدد مختلط e^z را، به این

ترتیب، تعریف می‌کنند:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (5.17)$$

که در آن $S_n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$ ؛ در ضمن، حدی که در رابطه

(5.17) داده شده است، به معنای عادی آن است: برای هر عدد حقیقی

$\varepsilon > 0$ ، عدد N وجود دارد، به نحوی که برای همهٔ عددهای $n > N$ ، نابرابری

$$|e^z - S_n| < \varepsilon \text{ برقرار باشد.}$$

می‌توان ثابت کرد که، برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 ، داریم:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \quad (5.18)$$

همچنین، می‌توان ثابت کرد که، برای هر عدد حقیقی φ ، دستور ادلر برقرار است:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (5.19)$$

با توجه به دستوره‌های (5.16) و (5.19)، می‌توان عدد مختلط z را،

به این صورت نشان داد:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, r \in \mathbb{R}, r > 0, \varphi \in \mathbb{R} \quad (5.20)$$

که آن را، دستور نمائی عدد مختلط z گویند. شکل نمائی عدد $z = 0$ نامعین است.

توجه داریم که عدد e^z ، ($z \in \mathbb{C}$) را می توان طور دیگری تعریف کرد: برابری (۵.۱۹) را به عنوان تعریف مقدار $e^{i\varphi}$ ، ($\varphi \in \mathbb{R}$) می پذیریم و، سپس، برای عدد مختلط e^z ، به شرط $z = (a, b)$ ، نوشت:

$$e^z = e^{a+bi} = \exp(a) \cdot e^{ib} = \exp(a)(\cos b + i \sin b) \quad (5.21)$$

در این صورت، دستورهای (۵.۱۷) و (۵.۱۸) را می توان نتیجه ای از دستور (۵.۲۱) دانست.

مثال ۴.۳۰۵. با استفاده از دستور (۵.۱۹)، به عنوان تعریف، ثابت کنید، برای عددهای حقیقی φ_1 و φ_2 ، داریم:

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2},$$

$$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} \quad (5.22)$$

حل. داریم:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \\ &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

و بنا به تعریف نسبت

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} =$$

$$= \left(\frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2}, \frac{-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} \right) =$$

$$= [\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

مثال ۳.۳.۵. برایی‌های (۵.۱۸) را از تعریف (۵.۲۱) نتیجه بگیرید.

حل. $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$ می‌گیریم. در این صورت

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$$

و بنا به تعریف (۵.۲۱):

$$e^{z_1} = \exp(a_1) \cdot e^{ib_1}, \quad e^{z_2} = \exp(a_2) \cdot e^{ib_2},$$

$$e^{z_1 \pm z_2} = \exp(a_1 \pm a_2) \cdot e^{i(b_1 \pm b_2)}$$

با در نظر گرفتن (۵.۲۲) و با توجه به این که برای عددهای حقیقی a_1 و a_2 داریم:

$$\exp(a_1 + a_2) = \exp(a_1) \cdot \exp(a_2),$$

$$\exp(a_1 - a_2) = \frac{\exp(a_1)}{\exp(a_2)}$$

به دست می‌آید:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \exp(a_1) \cdot e^{ib_1} \cdot \exp(a_2) \cdot e^{ib_2} =$$

$$= \exp(a_1) \cdot \exp(a_2) \cdot e^{ib_1} \cdot e^{ib_2} =$$

$$= \exp(a_1 + a_2) \cdot e^{i(b_1 + b_2)} = e^{z_1 + z_2};$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{\exp(a_1) \cdot e^{ib_1}}{\exp(a_2) \cdot e^{ib_2}} = \frac{\exp(a_1)}{\exp(a_2)} \cdot \frac{e^{ib_1}}{e^{ib_2}} =$$

$$= \exp(a_1 - a_2) \cdot e^{i(b_1 - b_2)} = e^{z_1 - z_2}$$

مثال ۴.۳.۵. $|z|$ و $\arg z$ را پیدا کنید و عدد z را به صورت نمایی

بنویسید، به شرطی که:

$$a \in \mathbf{R} \text{ و } z = a > 0 \quad (a)$$

$$a \in \mathbf{R} \text{ و } z = a < 0 \quad (b)$$

$$z = 1 + i \quad (d) \quad z = i \quad (c)$$

$$\alpha \in \mathbf{R}, 0 \leq \alpha < 2\pi, z = \sin \alpha - i \cos \alpha \quad (e)$$

$$\psi \in \mathbf{R}, 0 < \psi < 2\pi, z = 1 - e^{i\psi} \quad (f)$$

حل. (a) اگر $a > 0$ و $z = a = (a, 0)$ آن وقت

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a| = a$$

و بنابر دستور (۵.۱۴)

$$\arg z = \arccos \times \frac{a}{|z|} = \arccos 1 = 0$$

در نتیجه $a > 0$ ، $(a, 0) = a = a \cdot e^{i0}$ و در حالت خاص $1 = e^{i0}$.

(b) اگر $a < 0$ و $z = a = (a, 0)$ آن گاه

$$|z| = |a| = -a$$

و با توجه به دستور (۵.۱۴)

$$\arg z = \arccos \frac{a}{|z|} = \arccos \times (-1) = \pi$$

یعنی $-1 = e^{i\pi}$ و به خصوص $a < 0$ ، $(a, 0) = a = (-a)e^{i\pi}$.

(c) اگر $z = i = (0, 1)$ آن گاه $|z| = 1$. بنابر دستور (۵.۱۴)

$$\arg z = \arccos \frac{0}{|z|} = \frac{\pi}{2}, \quad i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$|z| = \sqrt{2}, \quad z = 1 + i = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad (d)$$

$$\arg z = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

صورت می نویسیم: $z = \sin \alpha - i \cos \alpha (e$ و $0 \leq \alpha < 2\pi$ ، عدد z را به این صورت می نویسیم:

$$z = 1 \cdot \left(\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

با توجه به نتیجه مثال ۱.۳.۵، $\alpha - \frac{\pi}{2} \in \text{Arg } z$ ، به این ترتیب، اگر داشته

باشیم: $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 2\pi$ ، آن وقت $0 \leq \alpha - \frac{\pi}{2} < 2\pi$ و

$$\arg z = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

و اگر $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آن وقت $\alpha - \frac{\pi}{2} + 2\pi \in \text{Arg } z$ و

$$0 \leq \alpha + \frac{3\pi}{2} < 2\pi, \arg z = \alpha + \frac{3\pi}{2}$$

و در نتیجه $z = 1 \cdot e^{i \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)}$.

(f) عدد $z = 1 - e^{i\psi}$ را به این صورت می نویسیم:

$$\begin{aligned} z &= 1 - (\cos \psi + i \sin \psi) = (1 - \cos \psi) - i \sin \psi = \\ &= 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} - i \cdot 2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} = 2 \sin \frac{\psi}{2} \left(\sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \right) \end{aligned}$$

چون $0 < \frac{\psi}{2} < \pi$ ، بنا بر نتیجه مثال ۱.۳.۵ و بخش (e) مثال

حاضر، خواهیم داشت: $|z| = 2 \sin \frac{\psi}{2}$ و به شرط $\pi \leq \psi < 2\pi$ داریم:

$\arg z = \frac{\psi - \pi}{2}$ و به شرط $0 < \psi < \pi$: $\arg z = \frac{\psi + 3\pi}{2}$. شکل نمائی

عدد z به صورت $z = 2 \sin \frac{\psi}{2} e^{i \frac{\psi - \pi}{2}}$ است.

مثال ۵.۳.۵. ثابت کنید، برای هر دو عدد مختلط $z_1 \neq 0$ و $z_2 \neq 0$ داریم $[(5.10)]$ را ببینید:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \quad (5.23)$$

$$\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2 \quad (5.24)$$

(به یاد بیاوریم که جمع مجموعه‌های $\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$ ، به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \{\varphi : \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \varphi_1 \in \text{Arg } z_1, \varphi_2 \in \text{Arg } z_2\}$$

و به همین ترتیب

$$\cdot (\text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2 = \{\psi : \psi = \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 \in \text{Arg } z_1, \varphi_2 \in \text{Arg } z_2\})$$

حل. فرض می‌کنیم: $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$

$\varphi_1 \in \text{Arg } z_1$ و $\varphi_2 \in \text{Arg } z_2$. عددهای z_1 و z_2 را به صورت نمایی می‌نویسیم:

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

در این صورت داریم:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$[(5.22)]$ را ببینید. چون $r_1 r_2 > 0$ و $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ و $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathbb{R}$ ، با توجه

به مثال ۱.۳.۵ داریم: $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$ و

$$\varphi_1 + \varphi_2 \in \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) \quad (5.25)$$

با توجه به اختیاری نبودن عضوهای مجموعه‌های $\varphi_1 \in \text{Arg } z_1$ و

$\varphi_2 \in \text{Arg } z_2$ ، به دست می‌آید:

$$\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \subset \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) \quad (5.26)$$

به همین ترتیب $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ و بنابراین

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|, \quad \varphi_1 - \varphi_2 \in \text{Arg} \frac{z_1}{z_2}$$

از آن جا

$$\text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2 \subset \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} \quad (5.27)$$

اکنون، φ را آرگومان دلخواهی از عدد $z_1 \cdot z_2$ می گیریم. مثل قبل، فرض می کنیم:

$$\varphi_1 \in \text{Arg } z_1, \quad \varphi_2 \in \text{Arg } z_2$$

با توجه به دستورهای (5.15) و (5.25)، عددهای درست k_1 و k_2 وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k_1\pi, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0 + 2k_2\pi$$

$$\varphi_0 = \text{Arg}(z_1 \cdot z_2)$$

از این جا نتیجه می شود: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2^*$ که، در آن، $\varphi_1 \in \text{Arg } z_1$ و

$$\varphi_2^* = \varphi_2 + 2(k_1 - k_2)\pi \in \text{Arg } z_2$$

یعنی $\varphi \in \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$. به این ترتیب، بنا بر اختیاری نبودن عضو $\varphi \in \text{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ خواهیم داشت:

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) \subset \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$$

و با توجه به (5.27)، به (5.23) می رسیم. با همین روش می توان رابطه

$$\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} \subset \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2$$

را به دست آورد و به (5.24) رسید.

برای عدد مختلط $z \neq 0$ ، نماد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$|\operatorname{Arg} z| = \min_{\varphi \in \operatorname{Arg} z} |\varphi| \quad (5.28)$$

مثال ۵.۳.۵. ثابت کنید، اگر $z \neq 0$ و $\varphi_0 = \arg z$ ، آن گاه

$$|\operatorname{Arg} z| = \min\{\varphi_0, 2\pi - \varphi_0\} \quad (5.29)$$

$$\arg \frac{1}{z} = \begin{cases} \arg z = 0, & (z \in \mathbb{R}, z > 0) \\ 2\pi - \arg z, & (\text{در بقیه حالت ها}) \end{cases} \quad (5.30)$$

حل. اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $k > 0$ ، آن وقت

$$|\varphi_0| = \varphi_0 < \varphi_0 + 2k\pi = |\varphi_0 + 2k\pi|$$

اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $k < -1$ ، آن وقت

$$|\varphi_0 - 2\pi| = 2\pi - \varphi_0 < 2\pi \cdot (-k) - \varphi_0 = |\varphi_0 + 2k\pi|$$

از این جا معلوم می‌شود که، از بین آرگومان‌های عدد مختلط z ، کمترین قدر مطلق را تنها می‌توان با مقدارهای φ_0 و $\varphi_0 - 2\pi$ بیان کرد؛ که منجر به همان دستور (۵.۲۹) می‌شود

به جز این $\arg 1 = 0$ [مثال ۵.۳.۵]؛ در نتیجه، بنا بر دستور (۵.۲۳)،

از برابری $\frac{1}{z} = 1$ ، به دست می‌آید:

$$\arg z + \arg \frac{1}{z} \in \operatorname{Arg} 1 = \{\varphi : \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

و این به معنای آن است که $\arg z + \arg \frac{1}{z} = 2k_0\pi$ (برای بعضی از مقدارهای $k_0 \in \mathbb{Z}$). اگر z ، عدد حقیقی مثبت نباشد، آن گاه $\arg z \neq 0$ و از نابرابری‌های $0 < \arg z < 2\pi$ و $0 \leq \arg \frac{1}{z} < 4\pi$ ، به دست می‌آید:

$0 < 2k_0\pi < 4\pi$ بنا بر این $k_0 = 1$ ، یعنی

$$\arg \frac{1}{z} = 2k\pi - \arg z = 2\pi - \arg z$$

و اگر z عددی حقیقی و مثبت باشد، بنا به مثال ۵.۳.۵. (a):

$$\arg z = \arg \frac{1}{z} = 0$$

$$\left| \operatorname{Arg} \frac{1}{z} \right| = |\operatorname{Arg} z| = 0$$

در این حالت

اگر z ، عددی حقیقی و مثبت نباشد، بنا بر دستور (۵.۳۰)

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Arg} \frac{1}{z} \right| &= \min \left\{ \arg \frac{1}{z}, 2\pi - \arg \frac{1}{z} \right\} = \\ &= \min \{ 2\pi - \arg z, \arg z \} = |\operatorname{Arg} z| \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که از دستور (۵.۲۹) به دست می‌آید:

$$|\operatorname{Arg} z| = \begin{cases} \arg z & (0 \leq \arg z \leq \pi) \\ 2\pi - \arg z & (\pi < \arg z < 2\pi) \end{cases} \quad (5.31)$$

و در همه حالات‌ها

$$0 \leq |\operatorname{Arg} z| \leq \pi$$

مثال ۵.۳.۵. ثابت کنید، اگر $z = it$ ، $t \in \mathbf{R}$ و $t \neq 0$ ، آن‌گاه

$$|\operatorname{Arg}(it)| = \frac{\pi}{2} \quad (5.32)$$

حل. در حالت $t > 0$ داریم:

$$it = t \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = |t| \cdot e^{i \frac{\pi}{2}}$$

و در حالت $t < 0$:

$$it = -t \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = |t| \cdot e^{i \frac{3\pi}{2}}$$

بنابراین، با توجه به دستور (۵.۳۱) به دست می آید:

$$|\operatorname{Arg}(it)| = \arg(it) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$

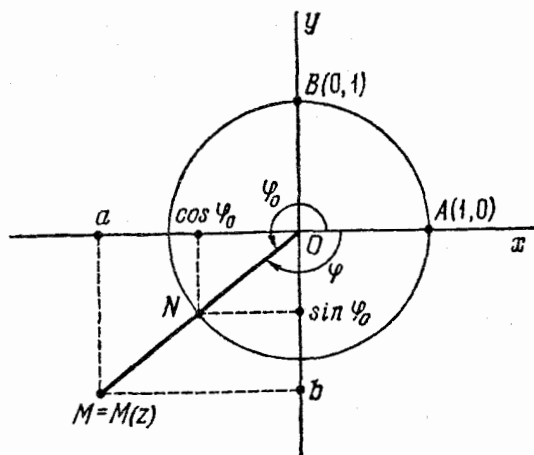
$$|\operatorname{Arg}(it)| = 2\pi - \arg(it) = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}, \quad t < 0.$$

بخش ۴.۵. تعبیر هندسی عددهای مختلط.

تعبیر I

P را صفحه‌ای جهت‌دار فرض می‌کنیم. دستگاه مختصات قائم و ثابت $\{O, e_1, e_2\}$ را در نظر می‌گیریم که، در آن، نقطه ثابت O از صفحه P به عنوان مبدا و پایه راست گردخواه $\vec{OA}$ ، $e_1 = \vec{OA}$ ، $e_2 = \vec{OB}$ ، یعنی $\{e_1, e_2\}$ در صفحه P انتخاب شده است (شکل ۱.۵).

عدد مختلط $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ را متناظر با نقطه $M(z)$ از صفحه P



می گیریم که، مختصات آن، در این دستگاه ثابت، (a, b) است (در شکل ۱.۵، هر دو مختص نقطه M منفی اند: $a < 0$ و $b < 0$). می گوییم، نقطه M معرف عدد مختلط $z = a + bi = (a, b)$ ، یا عدد z معرف نقطه M است. به این ترتیب، بین مجموعه نقطه های صفحه P و مجموعه عددهای مختلط C ، تناظری برقرار می شود (که به وضوح، تناظری یک به یک است). عددهای حقیقی $(a, 0)$ متناظر با نقطه های واقع بر محور x ها، و عددهای موهومی خالص $(0, b)$ متناظر با نقطه های محور y ها می شوند. محوره های x و y را، به ترتیب، محوره های حقیقی و موهومی می نامیم. همچون قبل، از نماد C ، برای نشان دادن مجموعه همه عددهای مختلط، استفاده می کنیم. روشن است که $M(0) = (0, 0) = 0$.

اگر $z = a + bi$ ، آن وقت نقطه $M(z)$ ، که معرف عدد مختلط z است، مختصاتی برابر (a, b) خواهد داشت. بنابراین، با توجه به دستور مربوط به فاصله دو نقطه، وقتی که مختصات معلومی دارند،

$$|OM(z)| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \quad (5.33)$$

اگر عدد مختلط z ، برابر صفر نباشد، آن وقت $\arg z$ ، دتمین مقدار غیر منفی زاویه φ_0 است، به نحوی که، اگر نیم خط راست $[OA]$ به اندازه φ_0 در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت دوران کند، بر نیم خط راست $[OM(z)]$ قرار گیرد.

□ اکنون به اثبات این مطلب می پردازیم. فرض می کنیم: $r = |z|$ ، $M = M(z)$ ؛ در ضمن، نقطه N را روی نیم خط راست $[OM]$ طوری انتخاب می کنیم که داشته باشیم: $|ON| = 1$. در این صورت $\vec{ON} = \frac{1}{r} \vec{OM}$

و نقطه N به مختصات $N\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ می شود. نقطه N ، بر محیط دایره به شعاع

واحد و مرکز مبداء مختصات قرار دارد. بنابراین، زاویه ای مانند $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ وجود دارد، به نحوی که دوران به اندازه φ_0 ، نقطه A را بر نقطه N منطبق کند (نیم خط راست $[OA]$ ، بعد از دوران، بر نیم خط راست $[OM]$ منطبق

می‌شود). بنا بر تعریف سینوس و کسینوس، $\cos \varphi_0$ و $\sin \varphi_0$ ، به ترتیب، برابر با طول و عرض نقطه N هستند. با توجه به منحصر بودن مختصات هر نقطه، داریم:

$$\frac{a}{r} = \cos \varphi_0, \quad \frac{b}{r} = \sin \varphi_0.$$

که از آن جا نتیجه می‌شود $[\varphi_0]$ را ببینید: $\varphi_0 \in \text{Arg } z$ و از آن جا که $\varphi_0 = \arg z$ ، بنا بر این $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ ■

چون در دوران دور مبدأ و به اندازه مضر بی از 2π ، هر نیم خط راست بر خودش منطبق می‌شود و وقتی دوران به اندازه زاویه‌ای غیر از مضرب 2π انجام گیرد، نیم خط راست بر خودش منطبق نمی‌شود، بنا بر این، با توجه به (5.15) ، $\varphi \in \text{Arg } z$ تنها وقتی درست است که در دوران به اندازه زاویه φ ، دور نقطه O ، نیم خط راست $[OA)$ بر نیم خط راست $[OM(z))$ قرار گیرد. در شکل ۱.۵، زاویه منفی $\varphi = \varphi_0 - 2\pi \in \text{Arg } z$ هم نشان داده شده است؛ دوران به اندازه این زاویه هم (دور نقطه O)، نیم خط راست $[OA)$ را بر نیم خط راست $[OM)$ منطبق می‌کند.

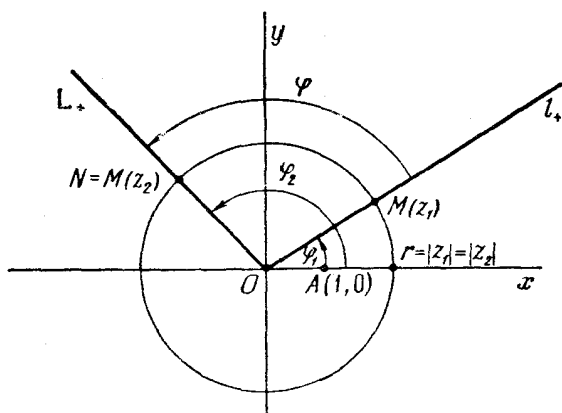
مثال ۱.۴.۵. ثابت کنید، اگر z_1 و z_2 عددهای مختلطی باشند، به نحوی

$$\text{که } |z_1| = |z_2| \neq 0, \text{ آن وقت}$$

$$M(z_2) = R_0^\varphi(M(z_1)) \quad (5.34)$$

که در آن، φ ، آرگومان دلخواهی از عدد $\frac{z_2}{z_1}$ و R_0^φ ، دورانی در صفحه P ، دور نقطه O و به اندازه زاویه φ است.

حل. $\varphi_1 \in \text{Arg } z_1$ و $\varphi_2 \in \text{Arg } z_2$ و $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ می‌گیریم. بنا بر آنچه دیدیم، نیم خط راست $I_+ = [OM(z_1))$ از دوران $[OA)$ دور نقطه O و به اندازه زاویه φ_1 به دست می‌آید. اکنون، اگر نیم خط راست I_+ را به اندازه زاویه φ دور مبدأ دوران دهیم (شکل ۲.۵)، به نیم خط راستی می‌رسیم که از دوران نیم خط راست $[OA)$ به اندازه $\varphi_1 + \varphi$ ، یعنی φ_2 ،



شکل ۲.۵

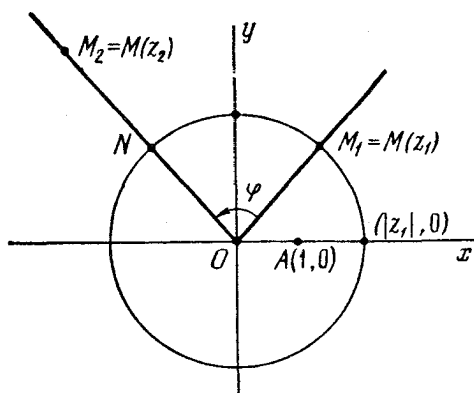
به دست می‌آید. ولی، وقتی دوران به اندازه زاویه φ_2 باشد، نیم خط راست $[OA)$ بر نیم خط راست $[OM(z_2))$ منطبق می‌شود. و این، به معنای آن است که، دوران دور نقطه O به اندازه زاویه φ ، نیم خط راست l_+ را بر نیم خط راست L_+ منطبق می‌کند، به خصوص، نقطه $M(z_1) \in l_+$ بر نقطه $N = R_0^\varphi(M(z_1)) \in L_+$ قرار می‌گیرد. در این صورت

$$\begin{aligned} |ON| &= |OR_0^\varphi(M(z_1))| = |OM(z_1)| = \\ &= |z_1| = |z_2| = |OM(z_2)| \end{aligned}$$

بنابراین، نقطه‌های N و $M(z_2)$ که بر نیم خط راست L_+ قرار دارند، از مبدأ به يك فاصله‌اند، یعنی $N = M(z_2)$. در ضمن روشن است که با انتخاب آرگومان‌های $\varphi_1 \in \text{Arg } z_1$ و $\varphi_2 \in \text{Arg } z_2$ ، عدد $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ آرگومان

دلخواهی از عدد $\frac{z_2}{z_1}$ خواهد بود [با توجه به دستور (۵.۲۴)].

مثال ۲.۴.۵ $z_1 \neq 0$ و $z_2 \neq 0$ را اعدادی مختلط و $M(z_1) = M_1$ و



شکل ۳.۵

$M(z_2) = M_2$ فرض می‌کنیم. ثابت کنید

$$M_2 = H'_0 \circ R_0^\varphi(M_1) \quad (5.35)$$

که در آن $r = \frac{|z_2|}{|z_1|}$ و φ ، آرگومان دلخواهی از عدد $\frac{z_2}{z_1}$ است. برعکس، ثابت کنید، اگر برابری (۵.۳۵)، برای مقدارهایی از $r \in \mathbf{R}$ ، $r > 0$ ، $\varphi \in \mathbf{R}$ برقرار باشد، آن وقت $z_2 = z_1 \cdot r e^{i\varphi}$.

حل. ضمن حل مسئله قبل، معلوم شد که نقطه $N = R_0^\varphi(M_1)$ بر نیم خط راست $L_+ = [OM_2]$ قرار دارد (شکل ۳.۵). نقطه M_2 هم، بر نیم خط راست L_+ ، به ابتدای نقطه O ، واقع است. چون

$$|ON| = |OM_1| = |z_1|, \quad |OM_2| = |z_2| = r|z_1|$$

بنابر تعریف تجانس، خواهیم داشت: $M_2 = H'_0(N)$. برعکس، اگر برابری (۵.۳۵) برقرار باشد، با توجه به دستور (۵.۳۳) و تعریف تجانس داریم:

$$|z_2| = |OM_2| = r |OR_0^0(M_1)| = r |OM_1| = r |z_1|,$$

$$r = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$$

سپس، از دستور (۵.۳۵) نتیجه می‌شود که نیم‌خط راست $[OM_2)$ را می‌توان از نیم‌خط راست $[OM_1)$ ، ضمن دوران آن دور نقطه O و به اندازه زاویه‌ای مثل φ به دست آورد. خود نیم‌خط راست $[OM_1)$ هم، از دوران نیم‌خط راست $[OA)$ دور نقطه O و به اندازه زاویه $\varphi_1 \in \text{Arg } z_1$ به دست می‌آید. بنا براین، نیم‌خط راست $[OM_2)$ ، نتیجه‌ای است از دوران $[OA)$ دور نقطه O و به اندازه زاویه $\varphi + \varphi_1$ و این می‌رساند که $\varphi + \varphi_1 \in \text{Arg } z_2$

$$\varphi = (\varphi + \varphi_1) - \varphi_1 \in \text{Arg } z_2 - \text{Arg } z_1 = \text{Arg } \frac{z_2}{z_1}$$

و بنا به تعریف شکل نهائی عدد مختلط داریم:

$$\frac{z_2}{z_1} = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i\varphi}$$

مثال ۳.۴.۵. $z_1 \neq 0$ و $z_2 \neq 0$ را عددی مختلط و $M_1 = M(z_1)$ ، $M_2 = M(z_2)$ فرض می‌کنیم. ثابت کنید زاویه $\widehat{M_1 OM_2}$ ، بین بردارهای $\vec{OM_1}$ و $\vec{OM_2}$ را می‌توان از این دستور به دست آورد:

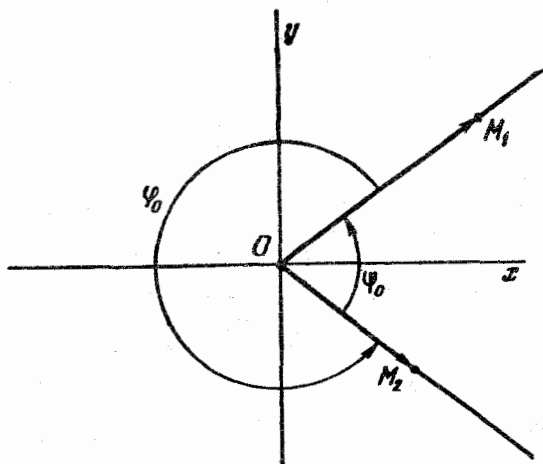
$$\widehat{M_1 OM_2} = \left| \text{Arg } \frac{z_2}{z_1} \right| \quad (۵.۳۶)$$

حل. اگر بردارهای $\vec{OM_1}$ و $\vec{OM_2}$ در يك جهت باشند، آن وقت

$$\widehat{M_1 OM_2} = 0, \quad M_2 = H_0' \circ R_0^0(M_1), \quad r = \frac{|OM_2|}{|OM_1|}$$

در این صورت، همان‌طور که در مسأله قبل دیدیم، در این حالت $0 \in \text{Arg } \frac{z_2}{z_1}$

و بنا بر دستور (۵.۳۱)



شکل ۴.۵

$$\left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = 0 = \widehat{M_1 O M_2}$$

حالتی را در نظر می‌گیریم که بردارهای $\vec{OM_1}$ و $\vec{OM_2}$ در یک جهت نباشند $\left(0 \notin \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right)$. فرض می‌کنیم: $\varphi_0 = \arg \frac{z_2}{z_1}$ و $\psi_0 = \arg \frac{z_1}{z_2}$. از آن جا که $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\left(\frac{z_2}{z_1} \right)}$ بنا بر دستور (5.30) : $\varphi_0 + \psi_0 = 2\pi$. بنا بر تعریف زاویه بین دو بردار، $\widehat{M_1 O M_2}$ برابر است با کوچکترین زاویه از بین دو زاویه φ_0 و ψ_0 (شکل ۴.۵):

$$\widehat{M_1 O M_2} = \min\{\varphi_0, \psi_0\} = \min\{\varphi_0, 2\pi - \varphi_0\} = \left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right|$$

مثال ۴.۴.۵. فرض می‌کنیم: $z_2 \neq 0, z_1 \neq 0$ عددهایی مختلط، و در ضمن

$$\widehat{M_1 OM_2} = \varphi, \frac{|OM_2|}{|OM_1|} = r, M_2 = M(z_2), M_1 = M(z_1)$$

در این صورت

$$z_2 = rz_1 \cdot e^{i\varepsilon\varphi} \quad (5.37)$$

که در آن، به شرط $\varphi \neq \pi$ ، $\varphi \neq 0$ و راست گرد بودن پایه $\{\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\}$ داریم $\varepsilon = 1$ ؛ به شرط $\varphi \neq \pi$ ، $\varphi \neq 0$ و چپ گرد بودن پایه $\{\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\}$ داریم $\varepsilon = -1$ و، بالاخره، به شرط $\varphi = 0$ یا $\varphi = \pi$ داریم $\varepsilon = 1$.

حل. اگر پایه $\{\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\}$ راست گرد باشد، آن وقت، کمترین دوران (یعنی، دوران به اندازه زاویه‌ای که قدرمطلق آن برابر φ باشد)، نیم خط راست $[OM_1)$ را، در جهت مثلثاتی (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت)، به نیم خط راست $[OM_2)$ می‌رساند. بنا براین

$$[OM_2) = R_\varphi^\varepsilon([OM_1)), \quad M_2 = H_0^\varepsilon \circ R_\varphi^\varepsilon(M_1)$$

و با توجه به نتیجه مثال ۹.۴.۵، برابری (۵.۳۷) برقرار است؛ در این حالت: $\varepsilon = 1$.

اگر پایه $\{\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\}$ چپ گرد باشد، آن وقت، کمترین دوران از $[OM_1)$ به $[OM_2)$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت خواهد بود بنا براین $[OM_2) = R_\varphi^{-\varepsilon}([OM_1))$ که همان برابری (۵.۳۷)، به ازای $\varepsilon = -1$ است. حالت‌های $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi$ روشن است.

بخش ۵.۵. تعبیر هندسی عددیهای مختلط.

تعبیر II

مثل بخش قبل، P را صفحه‌ای جهت دار و $\{O, e_1, e_2\}$ را دستگاه مختصات قائم و ثابتی در آن، فرض می‌کنیم.

عدد مختلط $z = (a, b) \in C$ را، متناظر با بردار

$$V(z) = ae_1 + be_2 = (a, b)$$

می گیریم. این تناظر، يك به يك است: هر بردار c از صفحه P ، تنها و تنها با يك عدد مختلط z متناظر است.

□ در واقع، با توجه به آنچه در بخش ۵.۲ دیده ایم، عددهای حقیقی منحصر به فردی مانند x و y وجود دارند، به نحوی که $c = xe_1 + ye_2$ و این، به معنای آن است که $c = V(z)$ که، در آن

$$z = (x, y) = x + yi \in C \blacksquare$$

عدد مختلط متناظر با بردار c را با $K(c)$ نشان می دهیم. در رابطه با این نماد گذاری، داریم:

$$K(V(a + bi)) = a + bi;$$

$$V(K(xe_1 + ye_2)) = xe_1 + ye_2 \quad (5.38)$$

ویژگی بسیار مهم تناظر يك به يك بین مجموعه C و مجموعه بردارهای واقع در صفحه P ، خطی بودن آن است: عددهای حقیقی λ و μ و بردارهای c_1 و c_2 واقع بر صفحه P ، داریم:

$$K(\lambda c_1 + \mu c_2) = \lambda K(c_1) + \mu K(c_2) \quad (5.39)$$

برای عددهای حقیقی λ و μ و عددهای مختلط z_1 و z_2 ، داریم:

$$V(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda V(z_1) + \mu V(z_2) \quad (5.40)$$

□ اگر $c_1 = x_1 e_1 + y_1 e_2$ و $c_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$ ، آن وقت

$$\lambda c_1 + \mu c_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2) e_1 + (\lambda y_1 + \mu y_2) e_2$$

و بنابراین

$$K(c_1) = (x_1, y_1), K(c_2) = (x_2, y_2),$$

$$\begin{aligned} K(\lambda c_1 + \mu c_2) &= (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1) + \\ &+ (\mu x_2, \mu y_2) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + \mu \cdot (x_2, y_2) = \\ &= \lambda \cdot K(c_1) + \mu \cdot K(c_2) \end{aligned}$$

[در این جا، از نخستین برابری (۵.۱) استفاده کرده ایم]. دستور

(۵.۳۹) ثابت شد. دستور (۵.۴۰) هم، به طریق مشابهی، ثابت می شود. ■

اگر $z \in C$ ، $M(z)$ ، تناظر بین عددهای مختلط را با نقطه های صفحه P بیان کند، (به نحوی که در بخش ۴.۵ تعریف کردیم)، آن گاه

$$\vec{OM}(z) = V(z) \quad (5.41)$$

از دستورهای (۵.۴۱) و (۵.۳۳) نتیجه می شود:

$$|z| = |V(z)| \quad (5.42)$$

□ (۵.۴۱) را ثابت می کنیم. اگر $z = (a, b)$ ، آن وقت نقطه

$M(z)$ در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2\}$ ، به مختصات (a, b) است. بنابراین

$$\vec{OM}(z) = ae_1 + be_2 = V(z) \quad \blacksquare$$

مثال ۵.۵.۱۰ فرض کنید: $z_2 \in C, z_1 \in C, c_2 = V(z_2), c_1 = V(z_1)$

$z_2 \neq 0, z_1 \neq 0$. مطلوب است زاویه بین بردارهای c_2 و c_1 ، به شرطی که:

$$z_2 = 1 - i, z_1 = 1 + i \quad (a); \quad z_2 = 2 + i, z_1 = 3 - i \quad (b)$$

حل. بنابر (۵.۴۱)، زاویه φ بین بردارهای c_2 و c_1 ، برابر است با

زاویه بین $\vec{OM}(z_2)$ و $\vec{OM}(z_1)$ ؛ و با توجه به دستور (۵.۳۶)، این زاویه

$$\text{برابر } \left| \text{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| \text{ می شود، یعنی}$$

$$(V(z_1), V(z_2)) = \left| \text{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| \quad (5.43)$$

(در حالت a)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$= i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad \left| \text{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{\pi}{2}$$

و در حالت b)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+5i+i^2}{9-i^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}; \left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{\pi}{4}$$

در این جا، از نتیجه مثال ۴.۳.۵ و دستور (۵.۳۱) استفاده کرده ایم.
 مثال ۴.۵.۵. $A(1, 1)$ ، $B(4, 0)$ و $C(3, 2)$ را رأس های يك مثلث بگیريد. مطلوب است محاسبه زاویه به رأس A در این مثلث (از این جا به بعد، مختصات نقطه ها را در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2\}$ ، به نحوی که در بخش ۴.۵ آورده ایم، در نظر می گیریم).
 حل. داریم:

$$\vec{AB} = (4-1, 0-1) = 3e_1 - e_2 = V(z_1), z_1 = 3-i$$

$$\vec{AC} = (3-1, 2-1) = V(z_2), z_2 = 2+i$$

و بنا بر دستور (۵.۴۳) [مثال ۱.۵.۵] (b) را بیابید:

$$\hat{A} = \left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۴.۵.۵. $z_1 \neq 0$ ، $z_1 \in C$ ، $c_1 = V(z_1)$ مفروض است. همه عددهای مختلط $z_2 = K(c_2)$ را پیدا کنید، به نحوی که داشته باشیم:
 $c_1 \perp c_2$

حل. روشن است که $z_2 = 0$ ، یعنی اگر $c_2 = 0$ ، آن گاه $c_1 \perp c_2$. اکنون فرض می کنیم $z_2 \neq 0$ ، عدد مختلط مطلوب باشد: $M_1 = M(z_1)$ و $M_2 = M(z_2)$. بنابراین $c_1 = \vec{OM}_1$ و $c_2 = \vec{OM}_2$ ؛ با توجه به شرط عمود بودن بردارهای c_1 و c_2 نتیجه می شود $\widehat{M_1 OM_2} = \frac{\pi}{2}$ ؛ و بنا بر دستور (۵.۳۷):

$$z_2 = rz_1 e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = rz_1 \left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \right) = \pm r i z_1$$

بنابراین، در هر حالت، جواب مسأله به این صورت است:

$$z_2 = itz_1, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.44)$$

برعکس، اگر $z_2 = itz_1$ ، آن وقت برای $t = 0$ داریم: $z_2 = 0$ و $c_2 = 0$ و $c_2 \perp c_1$ اگر $t \neq 0$ ، بنا بر دستور (5.32) داریم:

$$(\widehat{c_1, c_2}) = \left| \text{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = |\text{Arg}(it)| = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۰۴۰۵۰۵. در همان مثلث مثال ۰۲۰۵۰۵، طول ارتفاع $CH = h$ از مثلث ABC را پیدا کنید.

حل. فرض می‌کنیم (شکل ۵.۵):

$$c_1 = \overrightarrow{AB} = (3, -1), \quad c_2 = \overrightarrow{HC}, \quad c_3 = \overrightarrow{CA} = (-2, -1),$$

$$z_1 = K(c_1) = 3 - i, \quad z_2 = K(c_2), \quad z_3 = K(c_3) = -2 - i$$

چون $c_2 \perp c_1$ ، بنابراین با توجه به دستور (5.44)، عدد حقیقی t وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $z_2 = itz_1$. به جز این، بردارهای $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AB}$ هم راستا هستند. بنابراین، عدد حقیقی τ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\overrightarrow{AH} = \tau \overrightarrow{AB} = \tau c_1$ چون

$$0 = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$$

بنابراین، با توجه به دستور (5.39) داریم:

$$0 = K(0) = K(c_3 + \tau c_1 + c_2) = K(c_3) + \tau K(c_1) + K(c_2) = z_3 + \tau z_1 + itz_1;$$

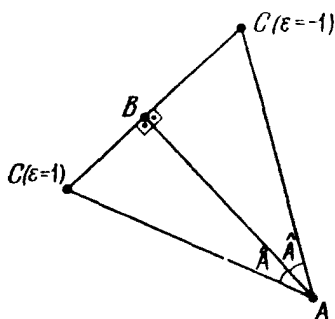
$$(\tau + it)z_1 = -z_3; \quad \tau + it = \frac{-z_3}{z_1} = \frac{2+i}{3-i}$$

از این جا (با توجه به مثال ۰۱۰۵۰۵ (b))، $\tau + it = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$. عددهای t و τ حقیقی‌اند و، بنابراین، با توجه به تعریف عددهای مختلط برابر، به دست می‌آید:

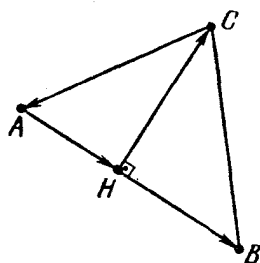
$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و با تکیه بر (۵.۴۲) داریم:

$$\begin{aligned} h &= |\vec{CH}| = |c_r| = |z_r| = \\ &= |itz_1| = |i| \cdot |t| \cdot |z_1| = 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$



شکل ۶.۵



شکل ۵.۵

مثال ۵.۵.۵. مطلوب است مختصات رأس C از مثلث قائم‌الزاویه

ABC ($\hat{B} = \frac{\pi}{2}$)، به شرطی که

$$A(2, -1), B(-1, -2), \hat{A} = \arctg \frac{4}{3}$$

حل. بنا به شرط مسأله $\hat{A} = \arctg \frac{4}{3}$. اکنون فرض کنید:

$$c_1 = \vec{AB} = (-12, 9), \quad z_1 = k(c_1) = -12 + 9i$$

$$c_r = \vec{AC}, \quad z_r = K(c_r), \quad r = \frac{|c_r|}{|c_1|} = \frac{|z_r|}{|z_1|} = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$$

چون زاویه φ ، بین بردارهای $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ برابر $\hat{A}$ است، بنا به دستورهای (۵.۴۱) و (۵.۳۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z_2 &= r \cdot z_1 \cdot e^{i\varepsilon\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot z_1 \cdot (\cos(\varepsilon\varphi) + i\sin(\varepsilon\varphi)) = \\ &= z_1 \cdot (1 + \varepsilon i \tan\varphi), \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$z_2 = (-12 + 9i) \left(1 + \varepsilon i \frac{4}{3} \right) = -12 + 9i - 16\varepsilon i +$$

$$+ 12\varepsilon i^2 = (-12 - 12\varepsilon, 9 - 16\varepsilon),$$

$$\vec{AC} = \mathbf{c}_2 = (-12 - 12\varepsilon, 9 - 16\varepsilon),$$

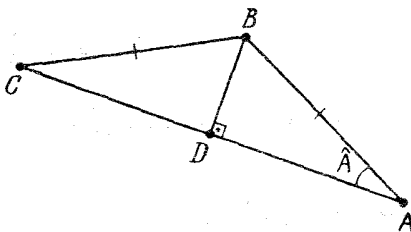
$$C(-10 - 12\varepsilon, -2 - 16\varepsilon), \quad \varepsilon = \pm 1$$

به این ترتیب، مسأله دوجواب دارد (شکل ۶.۵). (برای $\varepsilon = -1$) $C(2, 14)$ و (برای $\varepsilon = 1$) $C(-22, -18)$.

مثال ۶.۵.۵. مطلوب است مختصات رأس B از مثلث متساوی الساقین

ABC ، $(|AB| = |BC|)$ ، به شرطی که $A(7, -6)$ ، $C(-17, 12)$ و

$$\tan A = \frac{4}{3}$$



حل. وسط پاره‌خط راست $[AC]$ را D می‌نامیم (شکل ۷.۵). داریم:

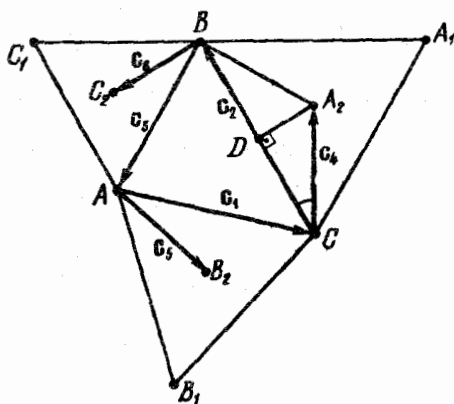
$$\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} \text{ و } \vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AC} = (-12, 9) \text{ فرض می‌کنیم: } \vec{c}_1 = \vec{AD}$$

$\vec{c}_2 = \vec{AB}$ (مثال ۵.۵.۵) $z_1 = K(\vec{c}_1) = -12 + 9i$, $z_2 = K(\vec{c}_2)$ (مثال ۵.۵.۵) $z_3 = K(\vec{c}_3) = -12 + 9i$, $\vec{c}_3 = \vec{AB}$ (ببینید). شبیه مثال ۵.۵.۵ به دست می‌آید:

$$z_4 = (-12 - 12\epsilon, 9 - 16\epsilon), B(-5 - 12\epsilon, 3 - 16\epsilon), \epsilon = \pm 1$$

مثال ۷.۵.۵. روی ضلع‌های مثلث ABC و در بیرون آن، مثلث‌های

متساوی‌الاضلاع BCA_1 , ACB_1 , ABC_1 را ساخته‌ایم، A_2 , B_2 و C_2 را مرکزهای سه مثلث اخیر می‌گیریم (شکل ۸.۵). ثابت کنید، مثلث $A_2B_2C_2$ متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۸.۵

حل. فرض می‌کنیم:

$$\vec{c}_1 = \vec{AC}, \vec{c}_2 = \vec{CB}, \vec{c}_3 = \vec{BA}, \vec{c}_4 = \vec{CA_1}, \vec{c}_5 = \vec{AB_1},$$

$$\vec{c}_6 = \vec{BC_1}, z_j = K(\vec{c}_j), j = 1, 2, \dots, 6$$

اگر D وسط پاره خط راست $[BC]$ باشد، داریم:

$$\widehat{CDA}_\gamma = \frac{\pi}{\gamma}, \quad \widehat{DCA}_\gamma = \frac{\pi}{\phi}, \quad \overrightarrow{CD} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{c}_\gamma, \quad |\mathbf{c}_\phi| = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{\cos \frac{\pi}{\phi}}$$

و [مثال ۵.۵.۵ و دستور (۵.۴۵) را ببینید]

$$z_\phi = \frac{1}{\gamma} \cdot z_\gamma \cdot \frac{1}{\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{\phi}} = z_\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right)$$

به همین ترتیب، ثابت می شود:

$$z_\delta = z_\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right), \quad z_\phi = z_\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right)$$

چون $\mathbf{c}_\delta + \mathbf{c}_\gamma + \mathbf{c}_\phi = \mathbf{0}$ بنا بر ویژگی (۵.۳۹) داریم:

$$z_\delta + z_\gamma + z_\phi = K(\mathbf{c}_\delta + \mathbf{c}_\gamma + \mathbf{c}_\phi) = K(\mathbf{0}) = 0$$

چون $\overrightarrow{B_\gamma C_\gamma} = -\mathbf{c}_\delta - \mathbf{c}_\gamma + \mathbf{c}_\phi$ و $\overrightarrow{B_\gamma A_\gamma} = -\mathbf{c}_\delta + \mathbf{c}_\gamma + \mathbf{c}_\phi$ بنا بر این، برای عددهای مختلط $z_\delta = K(\overrightarrow{B_\gamma C_\gamma})$ و $z_\gamma = K(\overrightarrow{B_\gamma A_\gamma})$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z_\gamma &= -z_\delta + z_\delta + z_\phi = z_\delta \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right) + z_\gamma \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_\delta \left(\frac{\sqrt{3}}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}i \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_\gamma \left(\frac{\sqrt{3}}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}i \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_\delta \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_\gamma \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}} (z_\delta \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z_\gamma); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_\delta &= -z_\delta - z_\gamma + z_\phi = -z_\delta \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right) - z_\gamma \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right) = \\ &= -z_\delta \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right) + (z_\delta + z_\gamma) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma\sqrt{3}}i \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 \cdot i + z_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} (z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z_2); \\
 &\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} (z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z_2)}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} (z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z_2)} = e^{i\frac{\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

چون $\overrightarrow{B_2 A_2} = V(z_2)$ و $\overrightarrow{B_2 C_2} = V(z_1)$ ، بنابر دستورهای (۵.۴.۲) و (۵.۴.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{|B_2 C_2|}{|B_2 A_2|} &= \frac{|\overrightarrow{B_2 C_2}|}{|\overrightarrow{B_2 A_2}|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1, \\
 \widehat{A_2 B_2 C_2} &= \left| \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

به این ترتیب، $A_2 B_2 C_2$ ، مثلثی متساوی‌الساقین با زاویه رأس برابر $\frac{\pi}{3}$ می‌شود، یعنی این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

ضمیمه

۱. ویژگی‌های تبدیل در تشابه به p

۱°. تشابه p ، با نسبت برابر k ، يك تبدیل يك به يك است. در این حالت، فضا (صفحه)، به يك فضای کامل (صفحه کامل) تبدیل می‌شود. برای p ، تبدیل معکوس وجود دارد که باز هم يك تبدیل متشابه (با نسبت $\frac{1}{k}$) است.

۲°. اگر A, B و C نقطه‌های واقع بر يك خط راست باشند، $C \in [AB]$ ، آن گاه تصویر آن‌ها در تشابه p ، یعنی $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(C)$ هم، بر يك خط راست قرار دارند: $p(C) \in [p(A)p(B)]$.

۳°. در تبدیل p ، تصویر خط راست (AB) ، خط راست $(p(A)p(B))$ ؛ تصویر پاره خط راست $[AB]$ ، پاره خط راست $[p(A)p(B)]$ ؛ تصویر نیم خط راست (AB) ، نیم خط راست $(p(A)p(B))$ و تصویر صفحه (ABC) ، صفحه $(p(A)p(B)p(C))$ است.

۴°. در تبدیل متشابه، تصویر دو خط راست موازی، دو خط راست موازی، تصویر نیم خط‌های راست هم جهت (یا با جهت‌های مخالف)، نیم خط‌های راست هم جهت (یا با جهت‌های مخالف) و تصویر صفحه‌های موازی، صفحه‌های موازی است.

۵°. اگر O, A و B ، سه نقطه غیر واقع بر يك خط راست باشند، آن وقت زاویه $\widehat{AOB}$ با زاویه $\widehat{p(A)p(O)p(B)}$ برابر است. اگر برای دو مثلث OAB و $O^*A^*B^*$ داشته باشیم:

$$\widehat{AOB} = \widehat{A^*O^*B^*}, \quad \widehat{ABO} = \widehat{A^*B^*O^*}$$

آن وقت، تبدیل تشابه‌ی p وجود دارد، به نحوی که برای آن داشته باشیم:

$$A^* = P(A), B^* = p(B), O^* = p(O)$$

۶°. ترکیب تبدیل‌های تشابهی با نسبت‌های k_1 و k_2 ، تبدیلی است تشابهی با نسبت $k_1 k_2$.

۲. ویژگی‌های تبدیل، در تجانس H_0^k

۱°. تبدیل تجانسی H_0^k ، همان تبدیل تشابهی با نسبت $\frac{1}{k}$ است.

۲°. در تجانس H_0^k ، تصویر هر صفحه، صفحه‌ای موازی با آن و تصویر هر خط راست (AB) ، خط راست $(H_0^k(A)H_0^k(B))$ موازی با آن است. دو نیم خط راست $[AB]$ و $[H_0^k(A)H_0^k(B)]$ بر يك امتدادند و در حالت $k > 0$ هم جهت و در حالت $k < 0$ در خلاف جهت یکدیگرند.

۳°. ترکیب دو تجانس $H_0^{k_1}$ و $H_0^{k_2}$ ، تجانس $H_0^{k_1 k_2}$ است.

۴°. اگر $O_1 \neq O_2$ و $k_1 k_2 \neq 1$ ، آن وقت، ترکیب دو تجانس $H_0^{k_1}$ و $H_0^{k_2}$ ، تبدیل تجانسی $H_0^{k_1 k_2}$ است که، مرکز تجانس آن، بر خط راست $(O_1 O_2)$ قرار دارد. مرکزهای دو تبدیل تجانسی $H_0^{k_1} \circ H_0^{k_2}$ و $H_0^{k_2} \circ H_0^{k_1}$ تنها وقتی بر هم منطبق اند که داشته باشیم: $(k_1 - 1)(k_2 - 1) = 0$.

۵°. ترکیب $H_0^{k_2} \circ H_0^{k_1}$ ، به شرط $k_2 = \frac{1}{k_1}$ ، يك انتقال است:

$$T_{(1-k_2)O_1 O_2}$$

۶°. معکوس تبدیل تجانسی H_0^k ، يك تبدیل تجانسی با نسبت $\frac{1}{k}$ است،

$$H_0^{\frac{1}{k}} \text{ یعنی}$$

۳. ویژگی‌های تقارن مرکزی Z_0

۱°. تقارن مرکزی Z_0 ، يك تبدیل تجانسی است: $Z_0 = H_0^{(-1)}$.

ترکیب يك تبدیل تقارن مرکزی با معکوس آن، برخورد شکل منطبق می شود.

۲°. تقارن مرکزی يك انتقال است.

۳°. ترکیب $Z_{O_1} \circ Z_{O_2}$ ، انتقال $T_{\vec{O_2 O_1}}$ است.

۴°. ترکیب $Z_{O_1} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_3}$ (از تقارن های مرکزی Z_{O_1} و Z_{O_2} و Z_{O_3})، تقارن مرکزی Z_{O_0} است که، مرکز آن، عبارت است از تصویر نقطه O_3 در تقارن مرکزی به مرکز وسط پاره خط راست $[O_1 O_2]$. اگر نقطه های O_1 ، O_2 و O_3 روی يك خط راست نباشند، آن وقت چهارضلعی $O_1 O_2 O_3 O_0$ متوازی الاضلاع است.

۴. ویژگی های انتقال $T_{\vec{AB}}$

۱°. اگر $\vec{AB} = \vec{A_1 B_1}$ ، آن گاه $T_{\vec{AB}} = T_{\vec{A_1 B_1}}$ ، یعنی برای هر نقطه C داریم: $T_{\vec{AB}}(C) = T_{\vec{A_1 B_1}}(C)$. برعکس، اگر دست کم برای يك نقطه C ، برابری $T_{\vec{AB}}(C) = T_{\vec{A_1 B_1}}(C)$ برقرار باشد، آن وقت $\vec{AB} = \vec{A_1 B_1}$.
۲°. انتقال يك تغییر مکان است.

۳°. تنها وقتی $\vec{AB} = \vec{CD}$ که $[AB] = T_{\vec{CA}}([CD])$.

۴°. تنها وقتی $[AB] \uparrow [A_1 B_1]$ که $[AB] = T_{\vec{A_1 A}}([A_1 B_1])$.

۵°. هر تبدیل $T_{\vec{AB}}$ يك تبدیل معکوس دارد که تبدیلی است در جهت پاره خط راست جهت دار $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

۶°. انتقال در جهت پاره خط راست جهت دار صفر، يك تبدیل همانی است.

۷°. در انتقال، تصویر يك صفحه، صفحه ای موازی با آن؛ تصویر يك خط راست، خط راستی است موازی با آن و تصویر يك نیم خط راست، نیم خط راستی است هم جهت با آن.

۸°. برای پاره خط های راست جهت دار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ داریم:

$$T_{\vec{AB}} \circ T_{\vec{CD}} = T_{\vec{CD}} \circ T_{\vec{AB}} = T_{\vec{AB} + \vec{CD}} = T_{\vec{CD} + \vec{AB}}$$

۹°. برای هر تعداد نقطه $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، تبدیل دوری زیر برقرار

است:

$$T_{A_n A_1} \circ T_{A_{n-1} A_n} \circ \dots \circ T_{A_2 A_3} \circ T_{A_1 A_2} = T_{A_1 A_1}$$

پایان